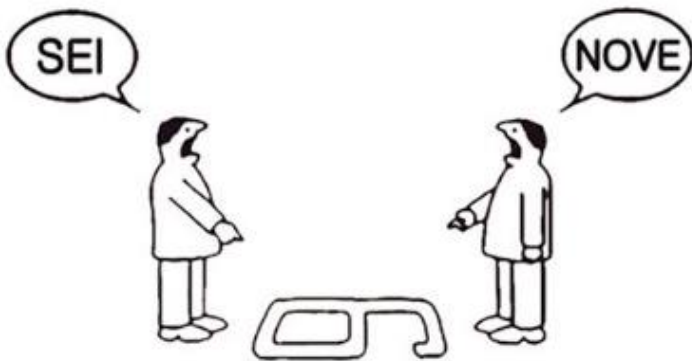


Linguaggi per spiegare... riflessioni sui processi risolutivi di un problema

CORSO BASE

RALLY MATEMATICO

09-01-2025



*Solo perché tu hai ragione, non significa
che io abbia torto: spiegami il perché...*



Ricordare cosa è importante:

Completa
Autonomia della
classe

Collaborazione
tra i ragazzi e
tra i gruppi

Compito del
sorvegliante ...

Ridotto il numero dei
problemi (5 o 6 a
secondo della categoria)
per dare più tempo alla
argomentazione

Le soluzioni sono giudicate
soprattutto rispetto al
ragionamento e alla chiarezza
delle spiegazioni fornite:
punteggio 1 alla risposta
corretta senza
argomentazione

La finale: riconoscimento
delle due classi per ogni
categoria che hanno
avuto il punteggio
maggiore

PROMEMORIA PER GLI INSEGNANTI CHE PARTECIPANO AL RALLY

Le prove ufficiali sono due che si svolgono nelle proprie classi.

Le prove si svolgono contemporaneamente in tutte le classi della Scuola.

La prova si svolge in 50 minuti. L'insegnante sorvegliante comunica agli alunni dieci minuti prima, il termine della prova.

L'insegnante di matematica della classe non è presente durante la prova. L'assistenza è affidata ad un collega (sorvegliante), che non deve dare spiegazioni.

Va consegnato un solo foglio risposta per problema, indicando su di esso solo il codice della classe e incollando il testo del problema sotto al codice. Un problema non risolto va comunque presentato in bianco.

E' importante scrivere sul foglio risposta, tutti i passaggi utilizzati per la soluzione, senza allegare brutte copie.

Più soluzioni presentate annullano la prova (viene dato punteggio 0).

E' opportuno che gli allievi formino liberamente i gruppi e scelgano il problema da risolvere, tra quelli messi a disposizione

Gli allievi possono usare qualsiasi strumento o materiale che ritengano utile (calcolatrici, forbici, carta...); possono produrre disegni, schemi, tabelle, anche su formati diversi rispetto al foglio A4 e allegare l'elaborato al foglio-risposta.

Risolto il problema assegnato al proprio gruppo, i bambini collaborano con gli altri gruppi per la soluzione di tutti gli altri problemi.

N.B - E' indispensabile che l'insegnante di classe durante la simulazione dia ai ragazzi la possibilità di vivere queste norme

La ricchezza del RM

Questionario:

spunto di riflessione per una maggiore consapevolezza di questo progetto, che va oltre la gara.

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeGOpDb9Yqw10nYnEr1AeRz5FPM4OeVzdSt_8SnsXnuHuOexA/viewform

L'argomentazione nelle Indicazioni Nazionali

- TRAGUARDI PER LA SCUOLA DELL'INFANZIA

I DISCORSI E LE PAROLE: “Sa esprimere e comunicare agli altri emozioni, sentimenti, **argomentazioni** attraverso il linguaggio verbale che utilizza in differenti situazioni comunicative.”

- IL SENSO DELL'ESPERIENZA EDUCATIVA NELLA SCUOLA PRIMARIA

La scuola propone situazioni e contesti in cui gli alunni riflettono per capire il mondo e se stessi, [...] **si confrontano per ricercare significati e condividere possibili schemi di comprensione della realtà, riflettendo sul senso e le conseguenze delle proprie scelte.**

L'argomentazione nelle Indicazioni Nazionali

- L' ALFABETIZZAZIONE CULTURALE DI BASE

La scuola primaria mira all'acquisizione degli apprendimenti di base, come primo esercizio dei diritti costituzionali. Ai bambini e alle bambine che la frequentano [...] permette di **esercitare differenti stili cognitivi**, ponendo così le premesse per lo **sviluppo del pensiero riflessivo e critico**. Per questa via si formano **cittadini consapevoli** e responsabili a tutti i livelli, da quello locale a quello europeo. La padronanza degli strumenti culturali di base è ancor più importante per **bambini che vivono in situazioni di svantaggio**: più solide saranno le capacità acquisite nella scuola primaria, maggiori saranno le probabilità di inclusione sociale e culturale attraverso il sistema dell'istruzione.

L'argomentazione nelle Indicazioni Nazionali

- L' AMBIENTE DI APPRENDIMENTO

Promuovere la **consapevolezza** del proprio modo di apprendere, al fine di “imparare ad apprendere”. Riconoscere le **difficoltà** incontrate e le **strategie** adottate per superarle, prendere atto degli errori commessi, ma anche comprendere le **ragioni di un insuccesso**, conoscere i propri punti di forza, sono tutte competenze necessarie a rendere **l'alunno consapevole del proprio stile di apprendimento** e capace di sviluppare autonomia nello studio. Occorre che l'alunno sia attivamente impegnato nella costruzione del suo sapere e di un suo metodo di studio, sia **sollecitato a riflettere su come e quanto impara**, sia incoraggiato a **esplicitare i suoi modi di comprendere e a comunicare ad altri i traguardi raggiunti**. Ogni alunno va posto nelle condizioni di capire il compito assegnato e i traguardi da raggiungere, riconoscere le difficoltà e stimare le proprie abilità, imparando così a riflettere sui propri risultati, valutare i progressi compiuti, riconoscere i limiti e le sfide da affrontare, rendersi conto degli esiti delle proprie azioni e trarne considerazioni per migliorare.

L'argomentazione nelle Indicazioni Nazionali: italiano

[...]è necessario che l'apprendimento della lingua sia oggetto di **specifiche attenzioni da parte di tutti i docenti**, che in questa prospettiva coordineranno le loro attività.

ORALITA': la pratica delle abilità linguistiche orali nella comunità scolastica passa attraverso l'esperienza dei diversi usi della lingua (comunicativi, euristici, cognitivi, espressivi, **argomentativi**) e la predisposizione di ambienti sociali di apprendimento idonei al dialogo, all'interazione, alla ricerca e alla costruzione di significati, alla condivisione di conoscenze, al **riconoscimento di punti di vista e alla loro negoziazione**.

TRAGUARDI PER LA SCUOLA SECONDARIA

Scrive correttamente testi di tipo diverso (narrativo, descrittivo, espositivo, regolativo, **argomentativo**) adeguati a situazione, argomento, scopo, destinatario.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO AL TERMINE DELLA TERZA SECONDARIA

Argomentare la propria tesi su un tema affrontato nello studio e nel dialogo in classe con dati pertinenti e motivazioni valide.

L'argomentazione nelle Indicazioni Nazionali: matematica

La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche **difficoltà linguistiche** e che richiede un'acquisizione graduale del **linguaggio matematico**. Caratteristica della pratica matematica è la **risoluzione di problemi**, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla **discussione con i pari**, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, **dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive**. Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, ...) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della **capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti**.

L'argomentazione nelle Indicazioni Nazionali: matematica

TRAGUARDI PRIMARIA

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, **mantenendo il controllo** sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. **Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.**

TRAGUARDI SECONDARIA

Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e **confrontandosi** con il punto di vista di altri. Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza. **Spiega il procedimento** seguito, anche in forma scritta, mantenendo il **controllo** sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. **Confronta procedimenti diversi** e produce **formalizzazioni** che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi. Produce **argomentazioni** in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). **Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni**; accetta di **cambiare opinione** riconoscendo le conseguenze logiche di una **argomentazione corretta**. Utilizza e interpreta il **linguaggio matematico** (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.

Prove Invalsi e Indicazioni Nazionali

Competenza matematica in INVALSI

Le dimensioni sono un ***raggruppamento dei traguardi (obiettivi di apprendimento)***, fondato sull'idea che le attività matematiche si riferiscano essenzialmente o all'***argomentare*** o al ***risolvere problemi*** e che queste due non siano completamente indipendenti l'una dall'altra e richiedano ***conoscenze*** su concetti, linguaggio formale e procedure.

La ***dimensione semiotica*** della rappresentazione è trasversale alle altre e assume in ciascuna di esse aspetti diversi.

DIMENSIONI

Argomentare

Produrre, verificare e giustificare affermazioni, in modo formale o non formale, comprendere testi che coinvolgono aspetti logici e matematici, costruire ragionamenti.

Risolvere problemi

Risolvere problemi riferibili sia ad aspetti interni alla matematica sia ad aspetti applicativi collegati ad ambiti scientifici (economico, sociale, tecnologico) o, più in generale, al mondo reale.

Conoscere

Conoscere concetti, algoritmi, procedure e farne un uso consapevole.

Prove Invalsi e Indicazioni Nazionali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.	T1	1
Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.	T2	1
Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.	T3	1
Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).	T4	1
Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.	T5	2
Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.	T6	2
Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.	T7	3
Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.	T8	2
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.	T9	3
Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).	T10	1

Prove Invalsi e Indicazioni Nazionali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.	T1	1
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.	T2	1
Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.	T3	2
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.	T4	2
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.	T5	2
Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	T6	2
Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).	T7	3
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.	T8	3
Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ecc.) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.	T9	1
Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienta con valutazioni di probabilità.	T10	2

PROVA INVALSI 2023-24 (seconda primaria)

Tab.2 Distribuzione degli item secondo le DIMENSIONI

Dimensione	Numeri NU	Spazio e figure SF	Dati e previsioni DP	Relazioni e funzioni RF	TOTALE
Conoscere	3	5	1	1	10
Risolvere problemi	2	1	8	5	16
Argomentare	2	1	0	1	4
TOTALE	7	7	9	7	30

PROVA INVALSI 2023-24 (quinta primaria)

Tab.2 Distribuzione degli item secondo le DIMENSIONI

Dimensione	Numeri	Spazio e figure	Dati e previsioni	Relazioni e funzioni	TOTALE
	NU	SF	DP	RF	
Conoscere	7	8	0	1	16
Risolvere problemi	5	0	9	4	18
Argomentare	2	1	1	2	6
TOTALE	14	9	10	7	40

VALUTAZIONE DELL'ARGOMENTAZIONE NEL RALLY

- Caratteristica peculiare del Rally Matematico è la **valutazione delle spiegazioni** fornite dai ragazzi per giungere alla soluzione.
- Oltre alla ricchezza di rappresentazioni iconiche, grafiche, spontanee oppure apprese, che i ragazzi utilizzano e cercano di armonizzare con un testo verbale, emergono due aspetti fondamentali: **l'aspetto logico/matematico – l'aspetto linguistico**. Si possono avere elaborati corretti sul piano logico , ma poveri e carenti sul fronte dei linguaggi, e viceversa a volte una spiegazione sbagliata sul piano logico può essere apprezzabile dal punto di vista dei linguaggi usati.
- Esistono diversi tipi di argomentazione: ne analizzeremo tre. Ciascuna argomentazione può inoltre essere valutata secondo criteri di **chiarezza, correttezza e completezza**.

ESEMPI DI PROTOCOLLI INTERESSANTI

7. CON 4 TRIANGOLI (Cat. 5, 6, 7)

Romeo ha un quadrato di carta di lato 10 cm. Lo ha ritagliato come mostrato in Figura 1, in modo che il triangolo centrale abbia due vertici esattamente a metà di due lati del quadrato.

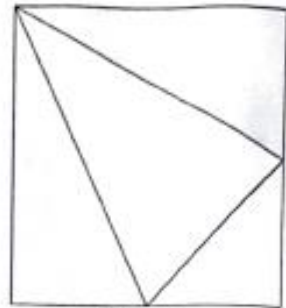


Figura 1

Romeo può formare numerose figure utilizzando tutti e quattro i triangoli. Per ogni coppia di triangoli fa coincidere due lati della stessa lunghezza.

Per esempio, può formare la figura 2, che ha lo stesso perimetro del quadrato da cui è partito, e la figura 3 che ha un perimetro maggiore. La Figura 4 invece non va bene perché due triangoli sono accostati lungo lati di diversa lunghezza.

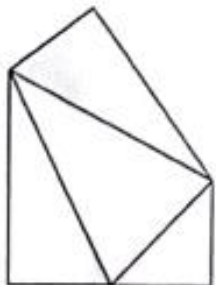


Figura 2

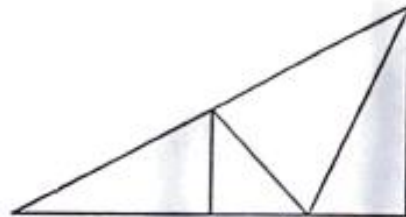


Figura 3

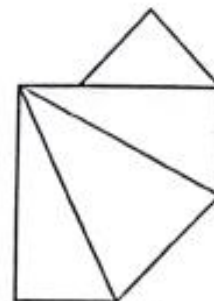


Figura 4

Disegnate una figura composta da questi quattro triangoli in modo che il perimetro sia il più grande possibile.

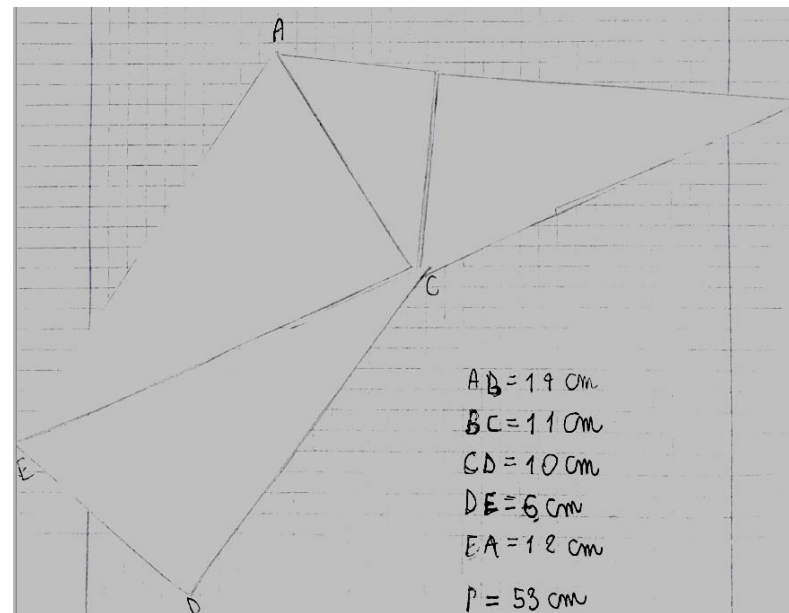
Quanto misura il perimetro?

Dite perché il perimetro è il più grande possibile.

(1) Argomentazione
come descrizione del
proprio ragionamento
nella risoluzione di
un problema:
conoscenza di tipo
procedurale.

Ragionamento:

Noi abbiamo ragionato così: come sempre per prima cosa abbiamo letto il testo 2 volte, dopo aver letto abbiamo disegnato la figura sul foglio di brutta. Dopo abbiamo ritagliato i 4 triangoli della prima figura. Poi abbiamo fatto un po' di prove; abbiamo voluto rileggere il testo per la 3° volta. Leggendo il testo abbiamo letto che dovevamo far coincidere i 2 lati della stessa lunghezza, e così abbiamo capito come dovevamo formare una 4° figura. Ecco la 4° figura.



Gli studenti raccontano passo per passo il proprio procedimento, soffermandosi su dettagli non disciplinari e senza che tale procedimento sembri orientato da una ragione teorica o di indagine sistematica: arrestano infatti la loro ricerca prima che tutte le figure possibili siano state create, senza assicurarsi dunque che la propria figura abbia il perimetro massimo.

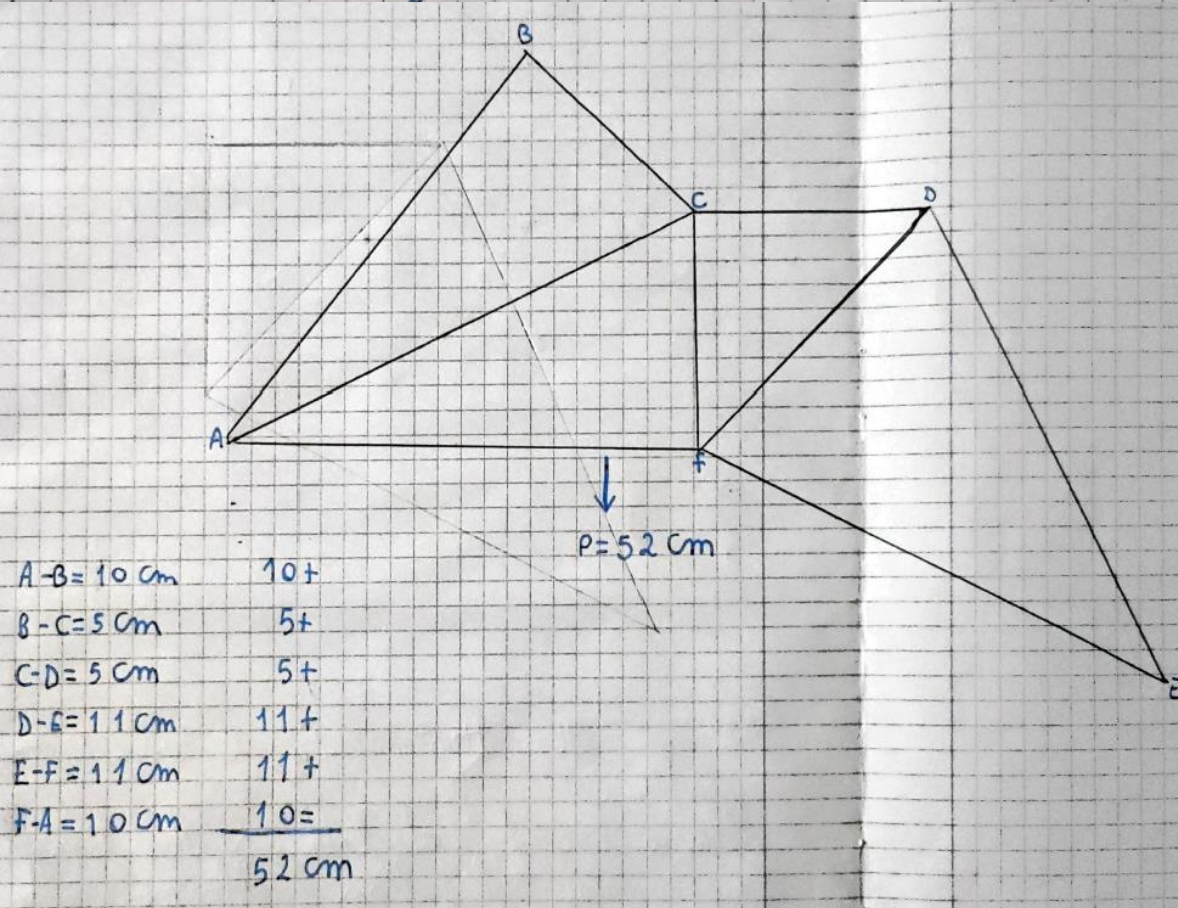
Per quanto questa argomentazione appaia slegata dalla conoscenza matematica e non venga citata alcuna ragione a supporto dell'idea, risulta comunque chiara nella descrizione del procedimento effettuato e completa nel riportare i passaggi svolti.

perimetro e il più grande possibile.
 Abbiamo letto attentamente il testo e abbiamo ragionato così:
 Abbiamo disegnato e ritagliato i quattro triangoli rappresentati sul problema e abbiamo provato a formare tutte le figure possibili spostando i triangoli e seguendo le regole, abbiamo calcolato

i loro perimetri.
 La figura con maggior perimetro ci dava cinquantadue centimetri.

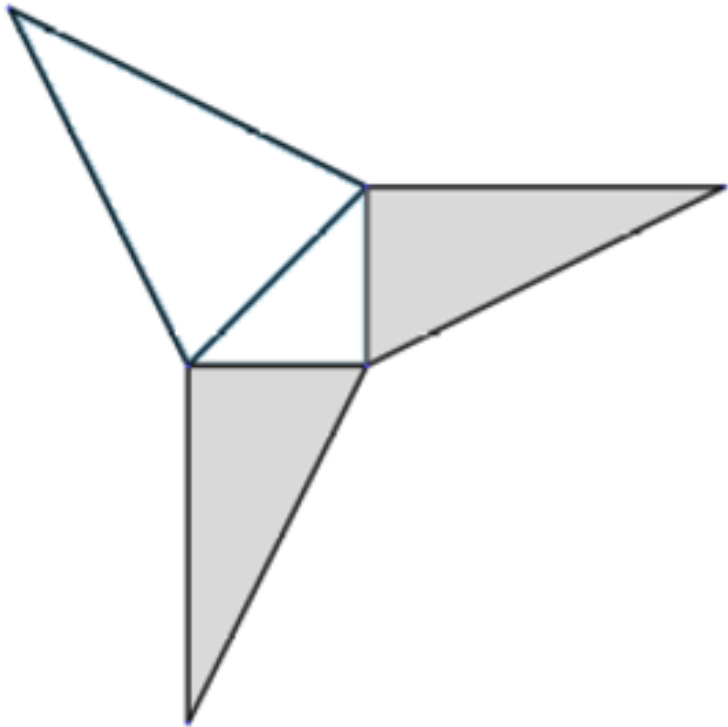
(2) Argomentazione come giustificazione del motivo
 per cui si sia scelto di risolvere il problema in un certo modo, dando ragione della plausibilità del proprio ragionamento.

Gli studenti in questo caso riportano di aver esplorato sistematicamente tutti i casi, o almeno esplicitano l'intenzione di farlo, giustificando con un'idea ragionevole la propria risoluzione e la ricerca della figura di perimetro massimo. L'argomentazione risulta chiara, pressoché completa, ma non corretta.



Il perimetro misura 64,4 cm.

Il perimetro è il più grande perché abbiamo usato le figure dai lati lunghi e più distanti possibile.



(3) Argomentazione come spiegazione che presuppone l'utilizzo di proprietà matematiche nel giustificare il proprio operato, mettendo in gioco conoscenze di tipo relazionale.

Gli studenti illustrano un procedimento che risulta essere guidato e motivato da argomenti teorici e che, in questo caso, guida la ricerca della figura di perimetro massimo, permettendo agli studenti di motivare il fatto che non possa esistere un'ulteriore figura di perimetro maggiore. L'argomentazione risulta dunque generale, applicabile a figure più complesse senza che debbano essere esaurite tutte le possibili combinazioni; è completa, sufficientemente chiara e corretta.

ESERCITAZIONE: ANALISI DI ALCUNI PROTOCOLLI

4. FARFALLE SULLE FINESTRE (cat. 3, 4, 5)

Gli alunni della classe di Dora hanno preparato farfalle di carta colorata per decorare le finestre della loro classe.

Su ogni finestra attaccano una prima farfalla, poi una seconda, poi una terza e quando ci sono 4 farfalle su ogni finestra, si accorgono che ne rimangono ancora 2 da attaccare.

Allora decidono di aggiungere una quinta farfalla su ogni finestra ma si rendono conto che quelle a disposizione non bastano; dovrebbero prepararne altre 3.

Quante finestre ci sono nella loro classe?

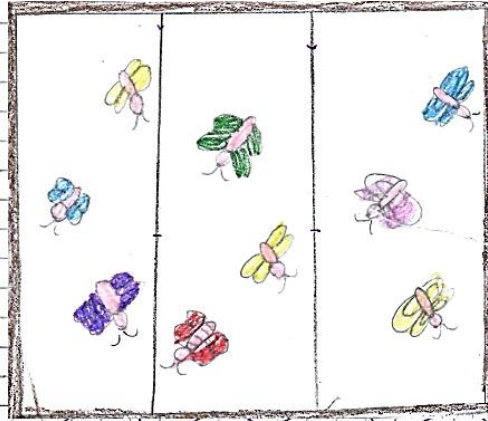
Quante farfalle hanno preparato gli alunni?

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

CATEGORIA 3

SOLUZIONE

Abbiamo fatto $4 + 2 + 3 = 9$
gli alunni hanno preparato 9 farfalle.
 $9 \times 4 = 36$



SPEGIAZIONE

Nella loro classe ci sono 3 finestre.
Gli alunni hanno preparato 9 farfalle.
Noi abbiamo ragionato sull'operazione e nel disegno.
Perché abbiamo letto bene il testo.

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

DATI

4 FARFALLE SU OGNI FINESTRA

2 DA ATTACCARE

3 DA PREPARARE

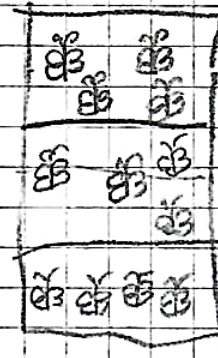
0 PERAZIONI

$$4 + 2 + 3 = 9 \quad 9 \times 4 = 36$$

RISPOSTA

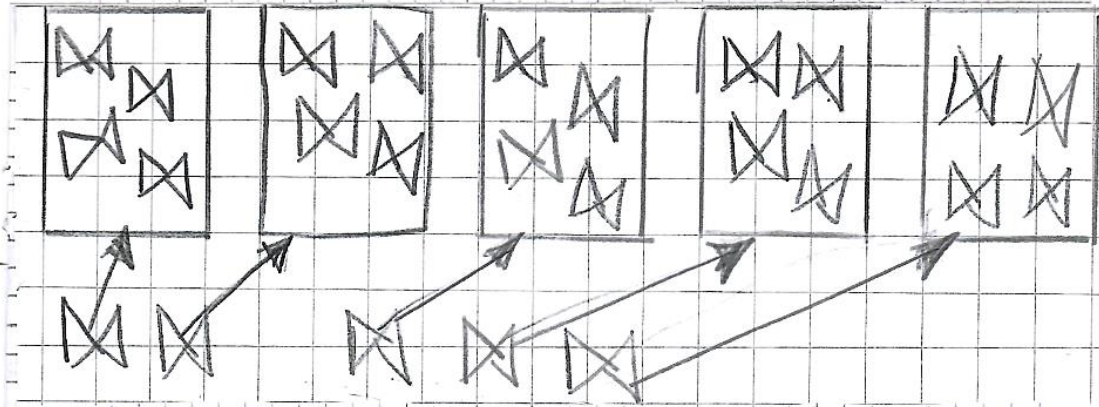
CI SONO NELLA LORO CLASSE 9 FINESTRE.

LI ALUNNI HANNO PREPARATO 36 FARFALLE.



CATEGORIA 3

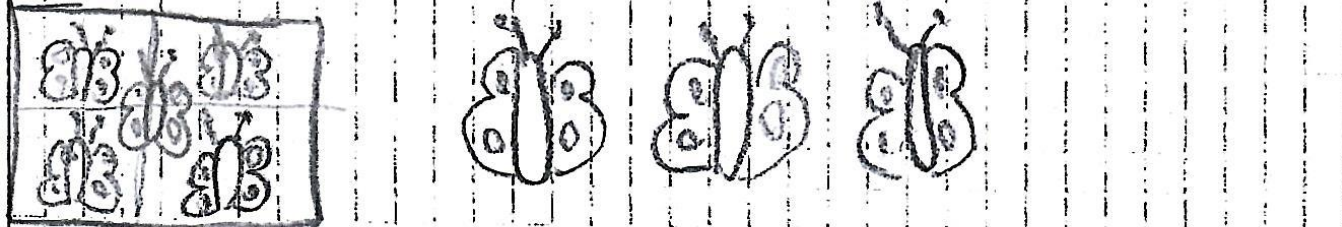
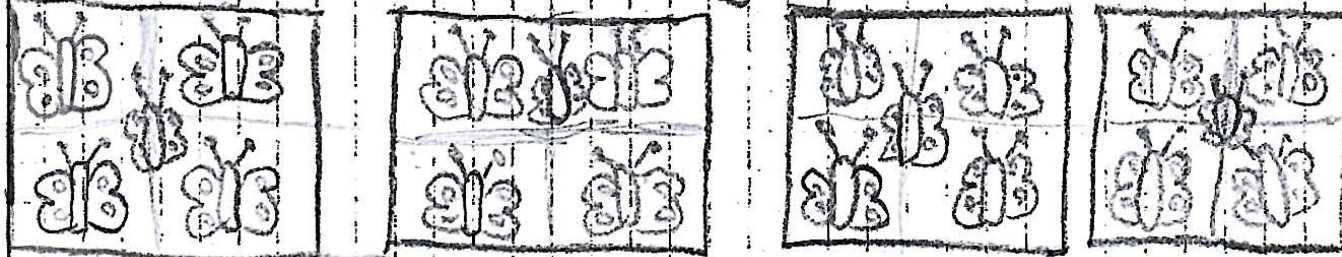
- NELLA LORO CLASSE CI SONO 5 FINESTRE.
- GLI ALUNNI HANNO PREPARATO 25 FARFALLE.
- NOI ABBIAMO TROVATO LE RISPOSTE DISEGNANDO LE FINESTRE E LE FARFALLE. POI CI SIAMO ACCORTI CHE CI RIMANEVANO 2 FARFALLE FUORI E LE ABBIAMO INSERITE IN 2 FINESTRE MA POI NE ABBIAMO DISEGNATE ALTRE 3 PER RIEMPIRE LE ALTRE 3 FINESTRE E COSÌ SIAMO ARRIVATI A CAPIRE CHE LE FINESTRE SONO 5 E LE FARFALLE 25.



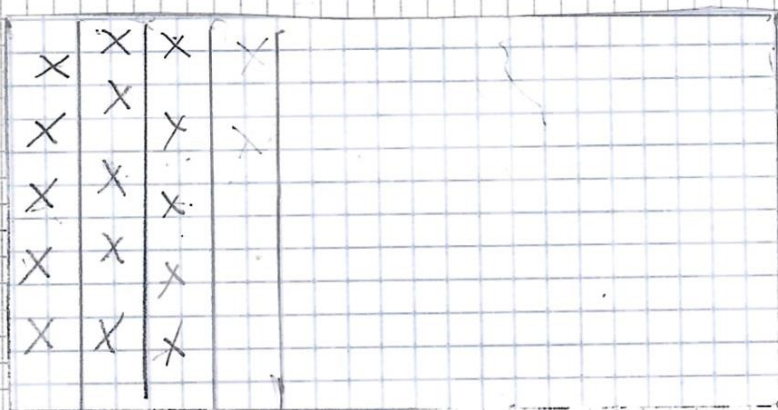
Quante farfalle hanno preparato gli alunni?

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

LE FINESTRE SONO 5 E LE FARFALLE SONO 25. SAPENDO CHE CI SONO RIMANETE 2 FARFALLE DIVIDENDO IN 4 FINESTRE NE RIMANGONO 3.



CATEGORIA 4



Facendo questo disegno abbiamo capito che le ^{FARFALLE} finestre sono 15

E le finestre sono 3

Abbiamo trovato sommando le farfalle su ogni finestra e poi abbiamo notato che sono 3 finestre e 15 farfalle

DATI.

1^a = prima farfalla

2^a = seconda farfalla

3^a = terza farfalla

4 = farfalle su ogni finestra

2 = farfalle da attaccare

5^a = farfalla

3 = farfalle da preparare

DOMANDA

Quante finestre ci sono nella loro classe?
Quante farfalle hanno preparato gli alunni?

OPERAZIONE

$$2 \times 9 = 18$$

$$5 \times 9 = 45$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$245 +$$

$$27 +$$

$$18 =$$

$$\hline 90$$

RISPOSTE

Nella classe di Dora ci sono 9 finestre

Gli alunni di Dora hanno preparato 90 farfalle

CATEGORIA 4

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

Abbiamo trovato la risposta considerando le due farfalle inviate immaginando che fossero già atterrate alle finestre. Considerando, poi, le 16 farfalle che hanno atterrate quindi in ogni finestra aggiungendo, quindi, le 2 farfalle ma non bastavano. Allora abbiamo immaginato che le finestre fossero 4 ma se atterriamo 4 farfalle in ogni finestra, cioè $4 \times 4 = 16$. Aggiungendo, poi, le 2 farfalle, 1 per ogni finestra, che fa 18, cioè $16 + 2 = 18$. Aggiungendo altre 3, poi, sulle due finestre restanti otteniamo una farfalla quindi abbiamo aggiunto una finestra e infine abbiamo ottenuto 25 farfalle totali e 5 finestre in tutto.

Dati:

4 = N° di farfalle in ogni finestra.

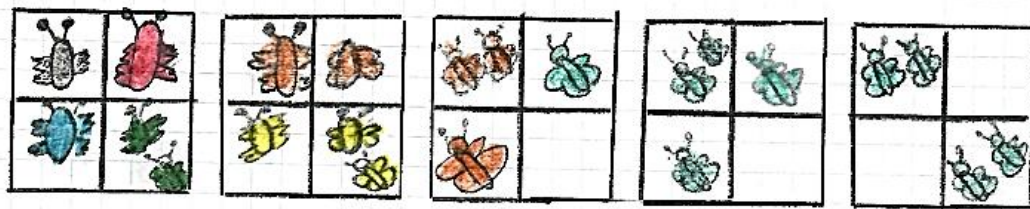
2 = N° di farfalle ancora da atterrare.

3 = N° di farfalle da preparare.

Devo risolvere:

Quante finestre ci sono nella loro classe.

Quante farfalle hanno preparato gli alunni



Risolvere

$$4 \times 5 + 2 = 22$$

Risponde:

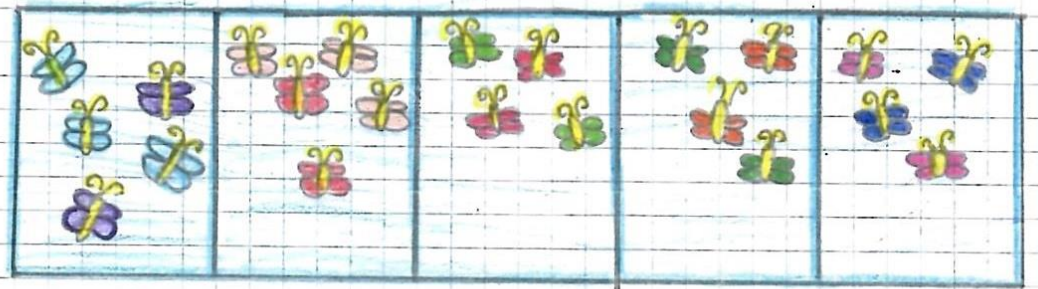
1) Nella loro classe ci sono 5 finestre.

2) Gli alunni hanno preparato 22 farfalle

Procedimento:

Per prima cosa si arriva alla risposta per prima cosa si siamo così come che quando c'erano 4 forfori su ogni ~~for~~ finestra ne rimanevano 2, poi quando gli alunni hanno messo 5 forfori su ogni finestra ne rimanevano 3 da usare per ~~for~~ for si che in ogni finestra c'è ne sono 5. ~~Da~~ Da lì abbiamo capito che facendo $3 + 2$ avremmo capito il numero delle finestre, ovvero 5. Dopo quando avremmo

capito il numero delle finestre cioè 5, abbiamo fatto $5 \times 5 - 3$ e così abbiamo capito il numero delle forfori fatte dagli alunni cioè 22.



Risposta:

- In tutte le finestre sono 5
- Le forfori fatte dagli alunni sono 22.

CATEGORIA 5

DATI:

4 = N° FARFALLE PER OGNI FINESTRA

2 = N° FARFALLE RIMANENTI

3 = N° FARFALLE DA PREPARARE

? QUANTE FINESTRE CI SONO NELLA LORO CLASSE

? QUANTE FARFALLE HANNO PREPARATO GLI ALUNNI

OPERAZIONI:

$$4 \times 8 = 32$$

$$32 + 3 = 35$$

RISPOSTA: (1° PRIMA)

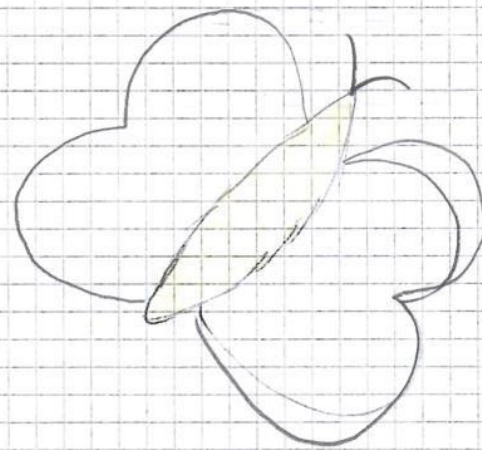
NELLA LORO CLASSE CI SONO 8 FINESTRE.

RISPOSTA: (2° SECONDA)

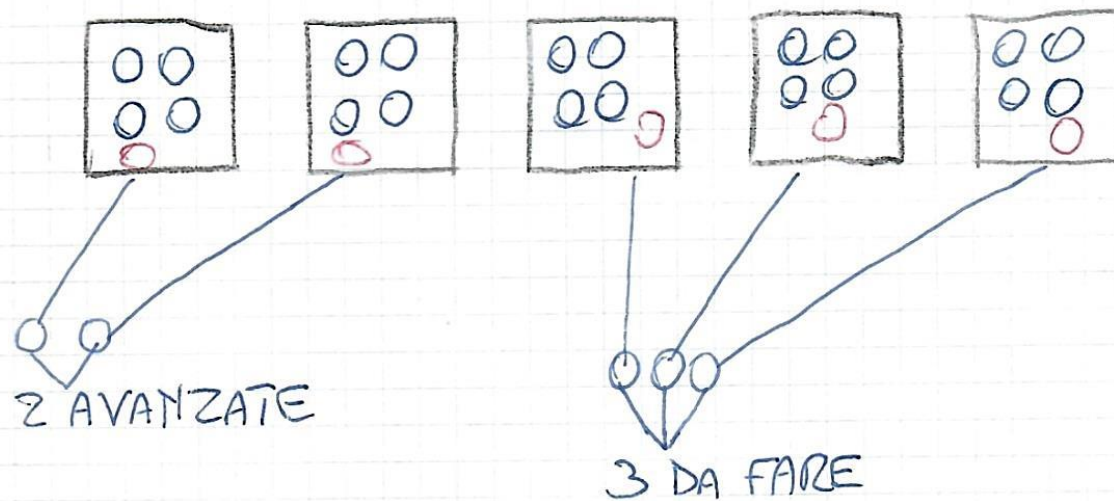
GLI ALUNNI HANNO PREPARATO 35 FARFALLE

SPIEGAZIONE:

ABBIAMO PROVATO A FARE $4 \cdot X$ CERTI NUMERI, POI ABBIAMO FATTO 4×8 CHE FA 32 E ABBIAMO AGGIUNTO 3, CHE SONO LE FARFALLE DA PREPARARE. E 8 SONO LE FINESTRE.



CATEGORIA 5



RISPOSTA : LE FINESTRE SONO 5 E LE FARFAZZE CHE HANNO PREPARATO SONO $22 + \text{LE } 3 \text{ DA FARE} = 25$ PALLINE

SOLUZIONE : PRIMA ABBIAMO MESSO 3 FINESTRE MA ABBIAMO NOTATO CHE ERANO POCHE , POI 4 MA ERANO PURE QUESTE POCHE , POI 5 E ERA GIUSTO SUCCESSIVAMENTE ABBIAMO MESSO LE 4 FARFAZZE IN OGNI FINESTRA E 2 CHE LE METTAVAMO SU 2 FINESTRE E POI 3 CHE ERANO QUELLE CHE DOVEVAMO FARE

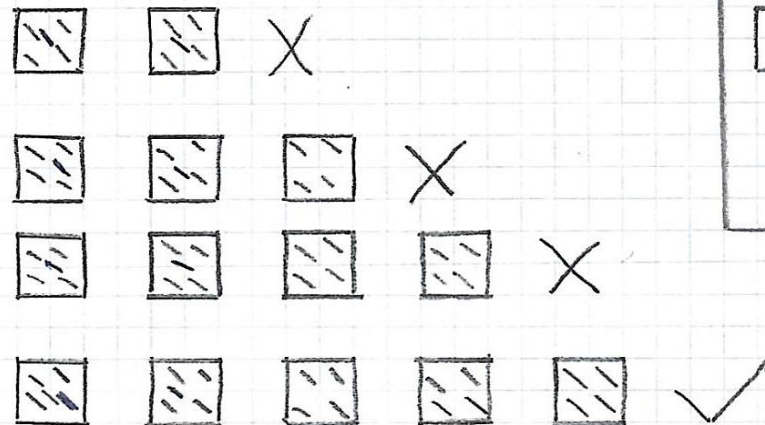
Proposta: Nella classe si sono 5 finestre: Gli alunni hanno preparato 22 farfalle.

Spiegazione:

Abbiamo iniziato a tentativi a rappresentare le finestre partendo da 2 ma non andava bene perché poi ~~se~~ ^{non} dovevamo aggiungere nessuna, il 3 neanche perché ne mancava 1 invece che 3, il 4 ne avremmo 2 invece che 3, infine che 5 era giusto perché dopo che ne rimuovemo 2 come nelle altre prove fatte ne rimanevano 3, quindi sono 5 finestre e hanno fatto 22 farfalle.

CATEGORIA 5

Rappresentazione:



LEGENDA:

□ = FINESTRE

∖ = FARFALLE

∖ = FARFALLE AGGIUNTE

BUONE PRATICHE PER SVILUPPARE LE COMPETENZE ARGOMENTATIVE

Educazione matematica: l'importanza del linguaggio (Focus Junior)

<https://www.focus-scuola.it/educazione-linguaggio-matematica/>

«**SCRIVERE I PASSAGGI DEGLI ESERCIZI** : la prima attività riguarda gli esercizi. Immaginiamo che abbiate chiesto di calcolare 18×23 . A questo punto è utile chiedere di **scrivere passaggio per passaggio** che cosa si fa per calcolare quel prodotto. Lo si può fare prima, prevedendo quali saranno i passaggi, oppure dopo descrivendo quello che è stato fatto e magari dicendo dove tutto è andato liscio e dove c'è stato un intoppo e sono sorte difficoltà».

BUONE PRATICHE PER SVILUPPARE LE COMPETENZE ARGOMENTATIVE

Educazione matematica: l'importanza del linguaggio (Focus Junior)

<https://www.focus-scuola.it/educazione-linguaggio-matematica/>

«**DISCUTERE DI UN PROBLEMA O DI UN ESERCIZIO**

Un'altra attività utile per fraternizzare con la "lingua della matematica" è discutere di un problema, di un esercizio. Intendo discuterne pubblicamente, davanti alla classe. La discussione può essere tra studente e insegnante, tra due studenti o in piccolo gruppo. Ma è importante che la classe assista, perché esprimersi con chiarezza e avere almeno un po' di attenzione dei compagni significa aver trovato le parole giuste per parlare di matematica. E non c'è niente di meglio che parlare agli altri per capire un po' più a fondo un concetto.

Insomma, facciamo fare qualche calcolo in meno e usiamo un po' di tempo per scrivere e parlare di quello che stiamo facendo. Serve a chiarire le idee nel breve periodo e prepara il terreno per quando l'apprendimento della matematica passerà dalla curiosità e dal "mettere le mani in pasta" alle deduzioni e alle dimostrazioni. Tra qualche anno (scolastico) per i vostri ex studenti sarà cruciale parlare e scrivere con una certa tranquillità la lingua della matematica».

IL RUOLO DEL DOCENTE

COME PIANIFICARE E GESTIRE UNA DISCUSSIONE? (Stein 2008)

- Anticipare le possibili risposte degli studenti di fronte ad attività matematiche stimolanti (analisi a priori).
- Monitorare le risposte degli studenti durante lo svolgimento delle attività, con lo scopo di identificare particolari strategie o rappresentazioni usate.
- Selezionare alcuni studenti e chiedere loro di presentare la loro soluzione durante una discussione in classe.
- Stabilire una sequenza di presentazione delle risposte al fine di promuovere un confronto tra idee simili o contrastanti.
- Aiutare gli studenti a fare collegamenti tra le diverse risposte.

ANALIZZARE INSIEME UNA BUONA SOLUZIONE

5. CASTELLI DI SABBIA (Cat. 3, 4, 5)

Alessia e Paolo giocano con la sabbia sulla spiaggia; Alessia utilizza un secchiello grande, mentre Paolo utilizza un secchiello più piccolo e un vasetto di yogurt.

- Paolo ha scoperto che con 3 vasetti di yogurt può riempire il suo secchiello e che con 2 dei suoi secchielli può riempire il secchiello di Alessia.
- Alessia ha fatto un castello con della sabbia umida che è andata a prendere riempiendo il suo secchiello 7 volte.
- Per il suo castello Paolo è andato a prendere della sabbia umida riempiendo il suo secchiello 10 volte e il suo vasetto di yogurt 8 volte.

Chi ha utilizzato più sabbia per costruire il suo castello?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALIZZARE INSIEME UNA BUONA SOLUZIONE

NOI ALL'INIZIO ABBIAMO DISEGNATO SU UN
 FOGLIO A QUADRETTI 12 SECCHIELLO DI
 ALESSIA E SICCOME 12 È DIVISIBILE PER
 METÀ E LA METÀ DI 12 È DIVISIBILE PER TERZI
 ABBIAMO DISEGNATO IL SECCHIELLO DI ALESSIA
 ALTO 12 QUADRETTI E QUELLO DI
 PAOLO L'ABBIAMO DISEGNATO ALTO 6
 QUADRETTI E SICCOME 2 È UN TERZO
 DI 6 ABBIAMO DISEGNATO IL VASETTO
 YOGURT ALTO 2 QUADRETTI. LA LAGH
 ZA ERANO TUTTI DI 4 QUADRETTI. NO
 ABBIAMO DISEGNATO IL SECCHIELLO DI PAOLO
 ALTO LA METÀ DI QUELLO DI ALESSIA
 PERCHÈ NELLA STORIA C'È SCRITTO CHE
 PAOLO CON SUOI 2 SECCHIELLI RIEMPIE QUE
 DI ALESSIA. ALLA FINE ALESSIA HA USATO
 PIÙ SABBIA.

SECC. 12 Q. ALESSIA
 SECC. 6 Q. PAOLO
 4011 VASETTO DI X 2 Q.

A
L
E
S
S
I
A
 P
A
O
L
O
 PAOLO

$12 \times 7 = 84$

A
L
E
S
S
I
A
 P
A
O
L
O

$16 + 60 = 76$
 $2 \times 8 = 16$
 $6 \times 10 = 60$

~~84~~
 PIÙ SABBIA
 ~~$12 \times 7 = 84$~~

ANALIZZARE INSIEME UN ERRORE INTERESSANTE

6. LA TORTA DI LUCIA (Cat. 4, 5)

Oggi Lucia vuole preparare una torta con la ricetta della nonna:

6 uova,

450 g di farina,

150 g di zucchero,

120 g di burro,

3 dl di latte.

Si accorge però che ha solamente 2 uova e che per realizzare la sua torta dovrà dunque adattare la quantità degli altri ingredienti.

Quanta farina, quanto zucchero, quanto burro e quanto latte dovrà utilizzare Lucia per adattare la ricetta?

Spiegate come avete trovato la risposta.

ANALIZZARE INSIEME UN ERRORE INTERESSANTE

LA NOSTRA RISPOSTA È CHE LUCIA PER ADATTARE TUTTI GLI INGREDIENTI DEVE DIVIDERLI PER 4 CIOÈ LE UOVA MANCANTI. 112.5 g DI FARINA, 37.5 g DI ZUCCHERO, 30g DI BURRO E 0,75 dl DI LATTE.

OPERAZIONE!

$$450 : 4 = 112.5$$

$$150 : 4 = 37.5$$

$$120 : 4 = 30$$

$$300 (3dl=300ml) : 4 = 75 (75ml=0,75dl)$$

$$6 - 2 = 4$$

PER TROVARE LA NOSTRA RISPOSTA ABBIAMO GUARDATO LA RICETTA ORIGINALE DOVE C'È SCRITTO CHE SERVIREBBERO PER LA TORTA 6 UOVA, VISTO CHE LUCIA SI ACCORGE CHE HA SOLO 2 UOVA ABBIAMO FATTO L'OPERAZIONE $6 - 2 = 4$. DOPO AVER CAPITO IL NUMERO DELLE UOVA MANCANTI (4) ABBIAMO DIVISO TUTTI I PRODOTTI PER 4. 1) LA FARINA CHE SAREBBE 450g DIVENTERÀ 112.5g PERCHÉ $450 (1. GRAMMI DI FARINA NELLA RICETTA ORIGINALE) : 4 (LE UOVA MANCANTI) = 112.5g$. 2) LO ZUCCHERO INVECE NELLA RICETTA ORIGINALE SONO 150g CHE DIVENTERANNO 37.5g PERCHÉ $150 : 4 = 37.5g$. 3) IL BURRO NELLA RICETTA ORIGINALE SONO 120g. CHE DIVENTERANNO 30g PERCHÉ $120 (1. GRAMMI NELLA RICETTA ORIGINALE) : 4 (LE UOVA MANCANTI) = 30g$. 4) IN QUESTA TRASFORMAZIONE PRIMA DI ESEGUIRLA DOBBIAMO FARE UNA EQUIVALENZA: $3dl = 300ml$, I 3dl DI LATTE DIVENTERANNO 0,75 dl PERCHÉ $300 (IL NUMERO TRASFORMATO IN ml ANCHE IL NUMERO DELLA RICETTA ORIGINALE) : 4 (LE UOVA MANCANTI) = 75ml$ CIOÈ 0,75dl.


Sbagliando si impara (?)



Sbagliando...
e riflettendo sugli errori (!)
si impara

Appendice

PROTOCOLLI ANALIZZATI NELLA GUIDA ALLA LETTURA DELLA PROVA INVALSI

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
<p>D19. Completa il fumetto con il numero che manca.</p>  <p>Penso al numero poi aggiungo 6 e ottengo 25</p>		NUMERI			
		DIMENSIONE			
		Argomentare			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		<p>TRAGUARDO Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.</p> <p>OBIETTIVO <i>Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo.</i></p>			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		Determinare l'addendo mancante in un'addizione espressa in forma verbale			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
19	Item	Mancante	Errata	Corretta	
	D19	9,9%	30,4%	59,8%	

Appendice

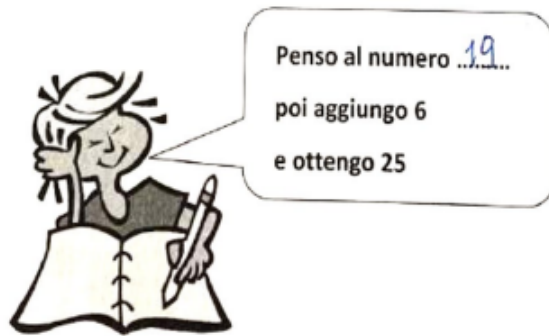
PROTOCOLLI ANALIZZATI NELLA GUIDA ALLA LETTURA DELLA PROVA INVALSI

La domanda richiede di completare un testo in cui è espressa verbalmente una relazione tra numeri: una addizione della quale sono noti solamente un addendo e la somma ed è necessario individuare l'addendo mancante.

Strategie di ragionamento efficaci per rispondere "19" consistono nel partire dal numero 25 e "tornare indietro" facendo l'operazione inversa a quella menzionata nel testo (*aggiungo*), cioè *sottraendo 6*, oppure nel partire da 6 e individuare che, per ottenere 25, occorre *aggiungere 19*.

Il protocollo sotto, a sinistra, mostra l'attuazione della prima strategia, ma si può osservare che il ragionamento inverso è adottato come verifica, per mantenere il controllo sull'operazione espressa nel testo (" $19+6 = 25$ ").

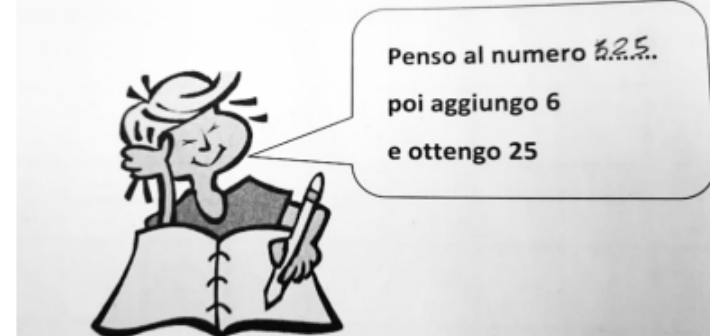
2. Completa il fumetto con il numero che manca.



$$25 - 6 = 19$$

$$19 + 6 = 25$$

3. Completa il fumetto con il numero che manca.




Il protocollo a destra rileva una difficoltà legata alla comprensione del testo: *aggiungo 6 e ottengo 25* si traduce qui nel giustapporre 6 e 25 nella scrittura del numero "625", come se il fumetto dicesse "Penso al numero 625 quando avvicino 6 a 25".

Nota. Nel fascicolo 1 della prova nazionale di matematica della classe quinta primaria, è presente una domanda in continuità con questa (D20).

Appendice

PROTOCOLLI ANALIZZATI NELLA GUIDA ALLA LETTURA DELLA PROVA INVALSI

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
<p>D20. Completa il fumetto scrivendo il numero corretto al posto dei puntini.</p>  <p>Penso al numero moltiplico il numero che ho pensato per 10, poi divido il risultato per 5 e ottengo 8</p>		NUMERI			
		DIMENSIONE			
		Argomentare			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		TRAGUARDO			
		<p>Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.</p> <p>OBIETTIVO</p> <p><i>Eeguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni.</i></p>			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		<p>Determinare un numero a partire da un testo che coinvolge aspetti logici e matematici</p>			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
4		Item	Mancante	Errata	Corretta
		D20	8,5%	25,1%	66,4%

Appendice

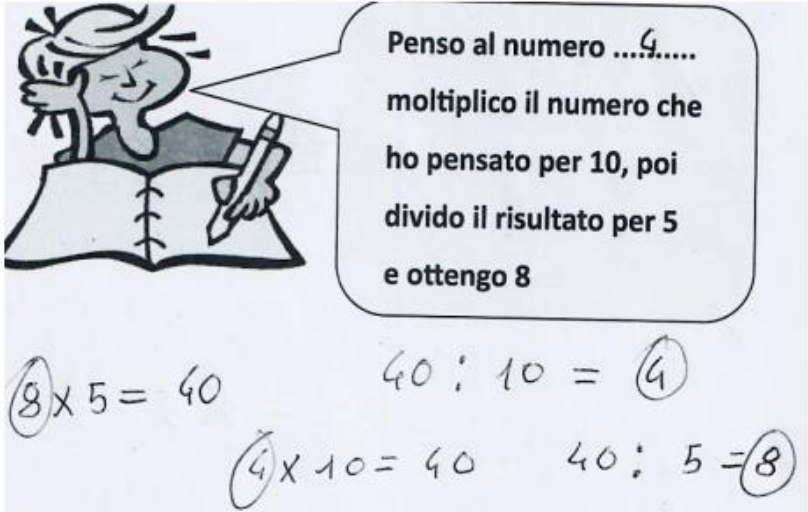
PROTOCOLLI ANALIZZATI NELLA GUIDA ALLA LETTURA DELLA PROVA INVALSI

COMMENTI E OSSERVAZIONI

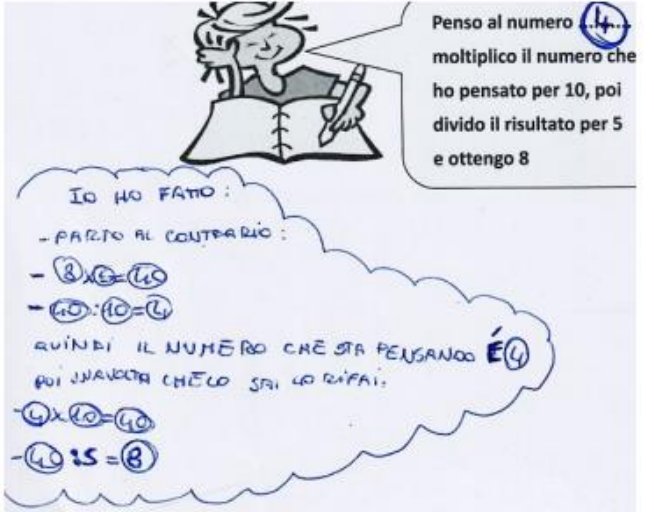
La domanda richiede di procedere a ritroso per risalire a un numero a partire dal quale sono compiute alcune operazioni espresse in un testo. Per determinare il numero, è sufficiente moltiplicare 8 per 5 e dividere il risultato ottenuto per 10.

Un elemento di difficoltà è rappresentato dal fatto di dover partire dal numero che nel testo compare per ultimo e dover utilizzare le operazioni inverse di quelle esplicitate nel testo: al posto di *dividere*, *moltiplicare* e al posto di *moltiplicare*, *dividere*.

I protocolli che seguono mostrano interessanti strategie di ragionamento basate su modalità di controllo del procedimento a ritroso, per ricostruire nel registro numerico la storia narrata dal testo.



Penso al numero ...4....
moltiplico il numero che
ho pensato per 10, poi
divido il risultato per 5
e ottengo 8

$$8 \times 5 = 40 \quad 40 : 10 = 4$$
$$4 \times 10 = 40 \quad 40 : 5 = 8$$


Penso al numero 4...
moltiplico il numero che
ho pensato per 10, poi
divido il risultato per 5
e ottengo 8

IO HO FATTO:
- PARTO AL CONTRARIO:
- $8 \times 5 = 40$
- $40 : 10 = 4$
QUINDI IL NUMERO CHE STA PENSANDO È 4
POI JUANITA CHE LO STA LO RIFAI:
- $4 \times 10 = 40$
- $40 : 5 = 8$

A sinistra il procedimento a ritroso è tradotto nelle operazioni inverse, di moltiplicazione per 5 e di divisione per 10 (" $8 \times 5 = 40$ " e " $40 : 10 = 4$ "), che conducono al numero "4", per poi essere verificato nella direzione dettata dalla temporalità del testo: " $4 \times 10 = 40$ " e " $40 : 5 = 8$ ". Il numero da cui partono e il numero cui giungono entrambi i procedimenti sono cerchiati in modo da evidenziarne il ruolo, come punto di partenza del ragionamento in un caso e come punto di arrivo nell'altro caso.

Appendice

PROTOCOLLI ANALIZZATI NELLA GUIDA ALLA LETTURA DELLA PROVA INVALSI

A destra, i vari passaggi di risoluzione sono resi espliciti per iscritto assieme al fatto che il ragionamento parte "AL CONTRARIO" e che "POI UNA VOLTA CHE LO SAI LO RIFAI" (per la verifica).

Altro esempio di strategia che si appoggia sul procedere a ritroso è illustrato qui sotto, a sinistra.

Il procedimento a ritroso è questa volta suddiviso in due parti: inizia dalla ricerca del numero che diviso per 5 permette di ottenere 8 (" $? : 5 = 8$ "), prosegue con il calcolo " $8 \times 5 = 40$ " che conduce ad associare 40 al "?", e continua con la traduzione di 40 in un multiplo di 10: " $4 \times 10 = 40$ ", per concludersi nella scrittura del numero "4" sui puntini.

...A....
numero che
10, poi
o per 5

$4 \times 10 = 40$

$? : 5 = 8$
 $8 \times 5 = 40$

40

Penso al numero 5....
moltiplico il numero che ho pensato per 10, poi divido il risultato per 5 e ottengo 8

$5 \times 10 = 50 : 5 = 10$

$5 \times 10 = 50 : 5 = 10$

METÀ

Una diversa strategia di ragionamento è illustrata nel protocollo a destra. La sequenza di operazioni espressa nel testo è applicata al numero 5: " $5 \times 10 = 50 : 5 = 10$ " e permette di riconoscere che il numero di partenza e il risultato ottenuto (entrambi cerchiati) sono legati dalla relazione di *metà*, tradotta in questo caso con un " $1/2$ ". Ciò permette a sua volta di pensare al numero cercato come "*METÀ*" di 8: le frecce svelano la temporalità del processo; il ragionamento può essere sintetizzato così: "5 è $1/2$ di 10 e, poiché 4 è metà di 8, il numero cercato è proprio 4" (anche se la concatenazione delle varie operazioni non presenta un corretto uso del simbolo "=" nella scrittura).

Nota. Nel fascicolo 1 della prova nazionale di matematica della classe seconda primaria, è presente una domanda in continuità con questa (D19).

Appendice

ESEMPI DI DOMANDE PER LA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

D21. Giovanni lancia due dadi non truccati contemporaneamente.



Giovanni afferma che la probabilità che sulle facce escano due numeri pari è la stessa che escano un numero pari e un numero dispari.

Giovanni ha ragione?

Nella tabella che segue indica la sola argomentazione che giustifica la risposta corretta.

Giovanni ha ragione perché ...	Giovanni non ha ragione perché ...
A. <input type="checkbox"/> su ciascun dado ci sono tre numeri pari e tre numeri dispari	C. <input type="checkbox"/> la probabilità che escano due numeri pari è la stessa che escano due numeri dispari
B. <input type="checkbox"/> la probabilità che escano un numero pari e un numero dispari è $1/2$	D. <input type="checkbox"/> la probabilità che escano due numeri pari è la metà della probabilità che escano un numero pari e un numero dispari

Appendice

ESEMPI DI DOMANDE PER LA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Ambito: Dati e previsioni

Livello di difficoltà: Difficile

Risposta corretta: D

Dimensione: Argomentare

Traguardo: Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni

Formato: Scelta multipla

Appendice

ESEMPI DI DOMANDE PER LA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Scopo della domanda: Individuare l'argomentazione corretta che giustifica un'affermazione su un confronto di probabilità

Commento

Per rispondere correttamente alla domanda è necessario costruire lo spazio degli eventi, in modo da toccare con mano che il numero di casi in cui, con il lancio di due dadi, possono uscire due numeri pari è la metà del numero di casi in cui possono uscire un numero pari su un dado e un numero dispari sull'altro (o viceversa). Tutte le argomentazioni sono affermazioni vere sulla probabilità in questo contesto, ma solo una di esse giustifica la risposta corretta: "Giovanni non ha ragione perché".

In relazione a questa domanda è disponibile il video "La probabilità" sul sito Invalsi Open al seguente link: <https://www.invalsiopen.it/percorsi-strumenti-invalsi/matematica/video-formativi-matematica/>

oppure sul canale YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=3WY-yPBeyLY&t=13s>.