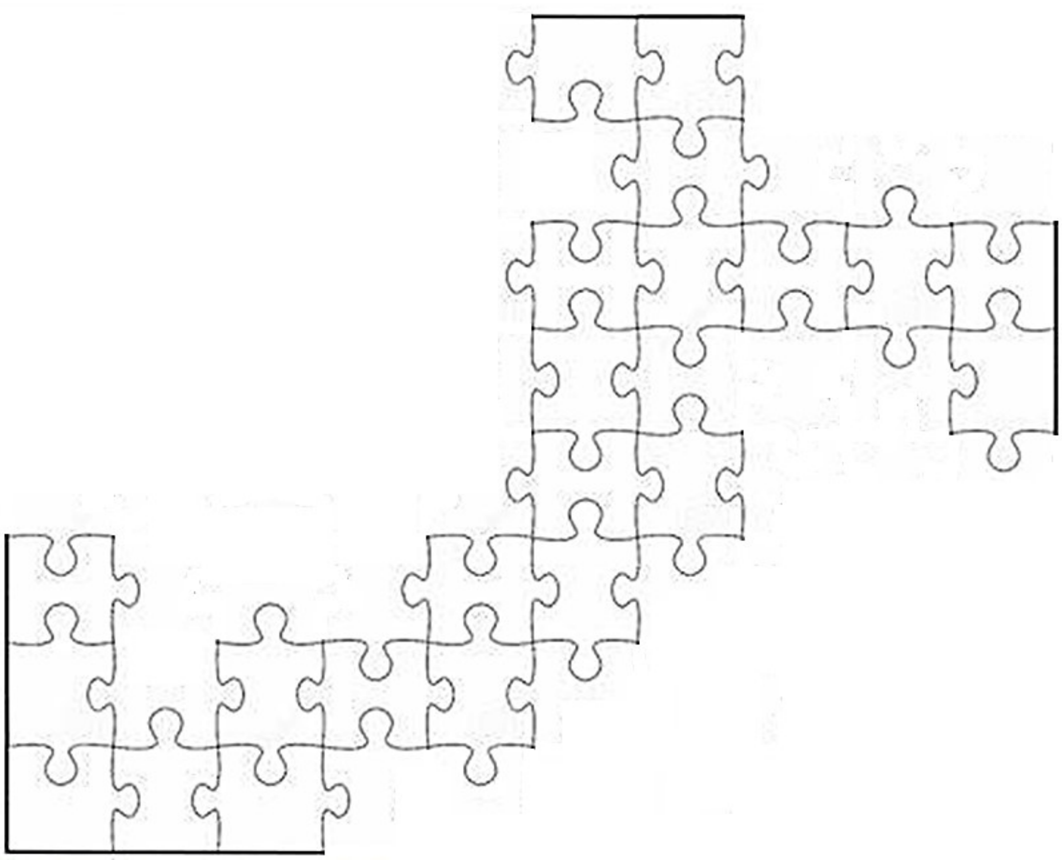
	Titolo	Livello								Ambito matematico
1	I pezzi mancanti (I)	3								Spazio e figure/Numeri
2	I gattini	3								Logica/Relazioni
3	I rettangoli di Giacomo	3	4							Spazio e figure
4	Numeri in caselle	3	4	5						Numeri
5	Storie di maghi	3	4	5						Numeri
6	I pezzi mancanti (II)		4	5						Spazio e figure/Numeri
7	Le piastrelle		4	5	6					Spazio e figure/Numeri
8	Festa in maschera			5	6	7				Logica
9	Alla Playstation (I)			5	6	7				Funzioni/Spazio-tempo
10	Windsurf (I)				6	7				Spazio e figure
11	Lancio di dadi				6	7	8			Dati e previsioni/Numeri
12	Le mattonelle					7	8			Spazio e figure
13	Biglie				6	7	8	9		Relazioni/Algebra
14	Windsurf (II)						8	9	10	Spazio e figure
15	Fantastico 2024						8	9	10	Numeri/Algebra
16	Festa di compleanno						8	9	10	Dati e previsioni
17	Alla Playstation II							9	10	Funzioni/ Spazio-tempo
18	Triangolo in un triangolo							9	10	Spazio e figure
19	Una questione di aree								10	Spazio e figure

1. I PEZZI MANCANTI (I) (Cat. 3)

Serena sta facendo un puzzle. È già riuscita a inserire correttamente alcuni pezzi.
Quanti pezzi deve ancora inserire Serena per completare il puzzle?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.



ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare il numero di pezzi che mancano per completare un puzzle rettangolare di 10 × 8 pezzi, nel quale sono già stati collocati 22 pezzi.

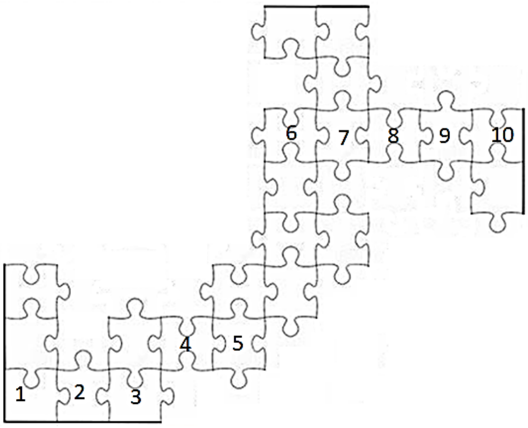
Appropriazione del compito

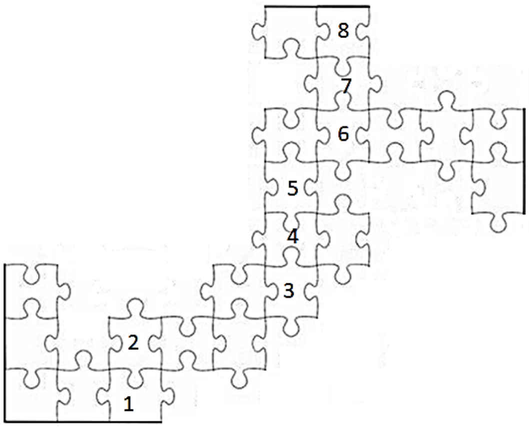
Comprendere la situazione descritta nell'enunciato: è rappresentato un puzzle incompleto, ma è possibile ricostruire le sue dimensioni totali.
Capire che occorre determinare il numero dei pezzi mancanti per completare il puzzle.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Osservare l'immagine, contare i pezzi rappresentati (22) e comprendere che il puzzle intero è composto da un numero di pezzi pari a 80 (10 × 8).





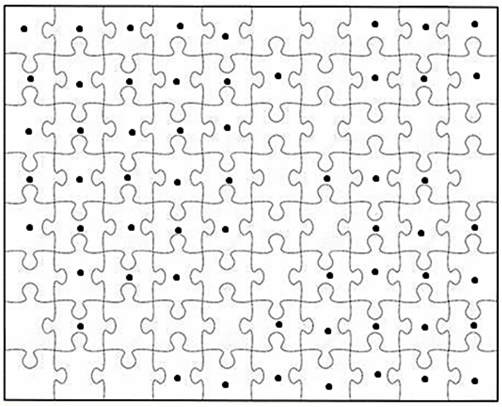
Calcolare per differenza quanti sono i pezzi mancanti (80 – 22 = 58).

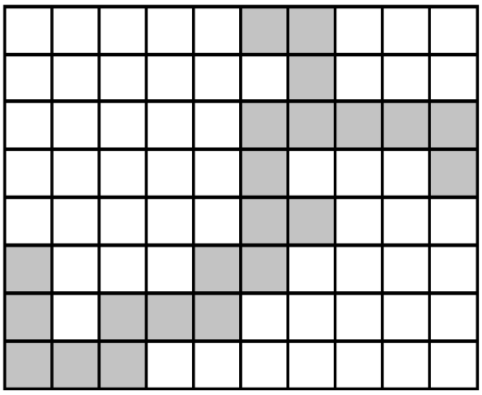
Strategia n. 2

Risolvere la situazione attraverso una procedura grafica.

Capire che ogni tassello del puzzle potrebbe essere rappresentato da un quadratino e completare il puzzle con una quadrettatura.

Contare poi i quadratini in cui non ci sono tasselli del puzzle.





Concludere che mancano 58 pezzi per completare il puzzle.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Serena deve inserire ancora 58 pezzi" con spiegazione chiara e completa (operazioni aritmetiche o rappresentazioni grafiche)

3 Risposta corretta con spiegazione incompleta o poco chiara

2 Rappresentazione corretta ma risposta errata (compresa fra 55 e 60) dovuta a un errore di conteggio o di calcolo

1 Risposta corretta senza spiegazione
oppure inizio corretto di ricerca che mostri la comprensione della struttura del puzzle (disegno del rettangolo e/o calcolo dei pezzi totali del puzzle (10 × 8 = 80)

0 Incomprensione del problema

2. I GATTINI (Cat. 3)

Sara, Rita e Tina parlano dei loro gattini.

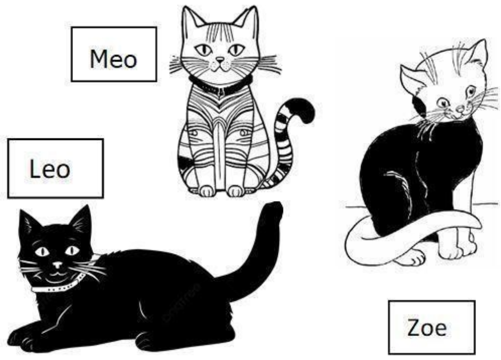
Sara dice: “Il mio gattino è tutto nero.”

Rita afferma: “Il mio gattino porta il collare.”

Tina aggiunge: “Il mio gattino ha la coda bianca.”

Nessuna delle tre bambine dice la verità.

Come si chiama il gattino di Tina?



Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Assegnati tre persone, tre animali e tre diverse caratteristiche, associare ogni persona al proprio animale tenendo conto del valore di verità di tre affermazioni.

Appropriazione del compito

Capire che bisogna attribuire ad ogni bambina il suo gattino, tenendo conto che l’affermazione espressa da ognuna di esse è falsa.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Analizzare i vincoli descritti:

Sara non ha il gattino nero, quindi potrebbe avere Meo o Zoe.

Rita è l’unica bambina alla quale può essere attribuito immediatamente il gattino, perché non porta il collare, quindi fra i tre è Zoe.

Di conseguenza il gattino di Sara, che non deve essere tutto nero, è Meo. Il gattino di Tina quindi è Leo.

Concludere quindi che Sara possiede il gattino di nome Meo, Rita possiede Zoe e Tina ha il gattino di nome Leo.

Strategia n. 2

Costruire una tabella e porre una crocetta sulle diverse possibilità (considerando le affermazioni vere, oppure quelle false)

Per esempio, nel caso siano considerate le affermazioni vere:

	MEO	ZOE	LEO
SARA	**X**	**X**	
RITA		**X**	
TINA	**X**		**X**

Dopo averla compilata, osservare le diverse intersezioni e stabilire il nome dei gattini di ciascuna bambina.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta “Il gattino di Tina si chiama Leo” con spiegazione chiara e completa: tabella a doppia entrata, diagramma a frecce, argomentazione scritta per esteso che non lascia adito ad interpretazioni diverse

3 Risposta corretta, con giustificazione incompleta o non chiara, solo con un tentativo di giustificazione o una verifica oppure ragionamento corretto e completo, ma senza esplicitare la risposta

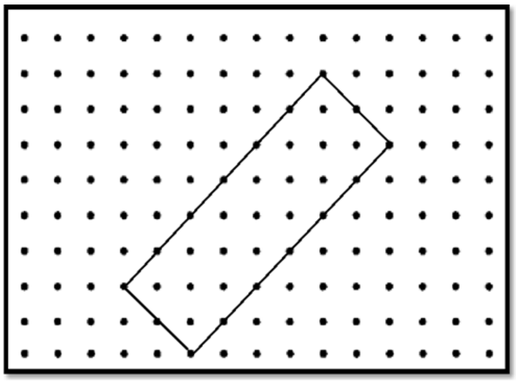
2 Inizio di ragionamento, con attribuzione dei gattini Zoe e Meo a Sara e/o Meo e Leo a Tina, senza arrivare alla soluzione

1 Risposta corretta, senza alcuna spiegazione oppure “Il gattino di Rita è Zoe” con spiegazione

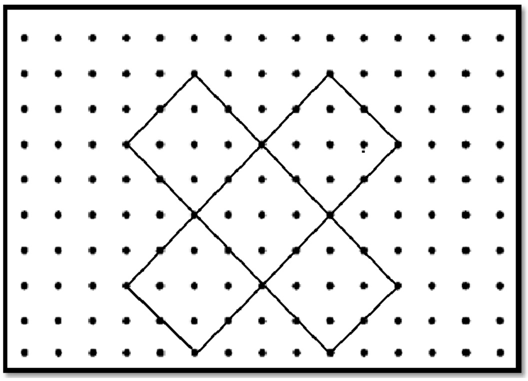
0 Incomprensione del problema o tentativi che non portano ad alcuna assegnazione

3. I RETTANGOLI DI GIACOMO (Cat. 3, 4)

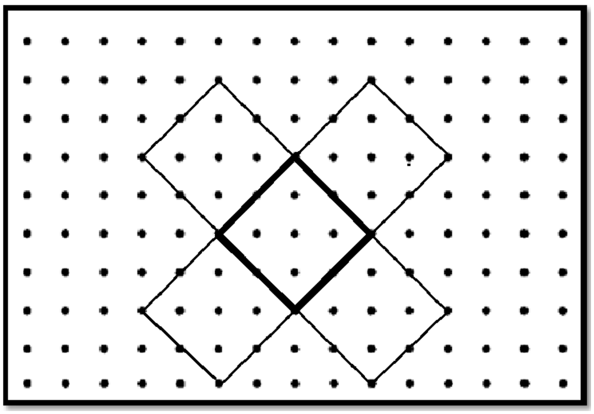
Giacomo fa dei disegni su fogli di carta punteggiata, come si vede in figura.
Prima disegna questo rettangolo:



Poi ne disegna un altro, uguale, che si incrocia con il primo, in questo modo:



Si accorge che i due rettangoli si sovrappongono in un quadrato, come evidenziato in questa figura:



Giacomo dice alla sua amica Giovanna: "Ho usato il mio temperino per misurare la lunghezza del contorno del quadrato centrale, l'ho ripetuto 28 volte".

Quanto misura in temperini il contorno del primo rettangolo che Giacomo ha disegnato?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare il perimetro di un rettangolo composto da tre quadrati congruenti, conoscendo la lunghezza del perimetro di uno dei quadrati.

Appropriazione del compito

Riconoscere nel disegno la situazione descritta nel testo, identificare i due rettangoli e il quadrato che si forma dall'intersezione delle due figure.

Comprendere che una dimensione del temperino è utilizzata come unità di misura non convenzionale.

Comprendere che la lunghezza del lato maggiore del rettangolo è tre volte quella del lato del quadrato centrale.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Poiché il contorno del quadrato centrale è costituito da quattro lati uguali e misura 28 "temperini":

- dedurre che il lato minore di ciascun rettangolo è la quarta parte di 28 "temperini", cioè 7 "temperini"
- riconoscere che il lato maggiore di ciascun rettangolo è il triplo del lato del quadrato e cioè 21 (7 × 3 oppure 7 + 7 + 7) "temperini"
- addizionare le misure in temperini dei quattro lati di un rettangolo per determinare la misura del contorno: 21 + 21 + 7 + 7 = 56 in "temperini"

Strategia n. 2

Osservare il disegno e notare che il contorno del quadrato centrale è formato da 4 lati uguali, ognuno dei quali è a sua volta uguale al lato minore di ciascuno dei rettangoli;

- osservare che il lato maggiore di ciascuno dei rettangoli contiene tre volte il lato del quadrato;
- contare quante volte il lato del quadrato centrale si trova lungo il contorno del rettangolo (8 volte);

Da questo presupposto le conclusioni possono essere due:

- considerato che il lato del quadrato è uguale a 7 "temperini" (28 : 4) si può calcolare la misura del perimetro del primo rettangolo, 56 "temperini" (7 × 8);
- oppure poiché il contorno del quadrato contiene 4 volte il suo lato, concludere che il contorno del rettangolo lo contiene un numero doppio di volte, quindi il contorno di ciascuno dei rettangoli misura 2 × 28 "temperini", cioè 56 "temperini".

Strategia n. 3

Dopo aver determinato la misura del lato del quadrato in temperini, osservare che il rettangolo è formato da 3 quadrati. Rendersi conto però che calcolando il triplo del contorno del quadrato si aggiunge al contorno di ogni rettangolo 4 volte il lato del quadrato che quindi occorre poi togliere.

Pertanto il contorno di un rettangolo misura (28 + 28 + 28) – (7 + 7 + 7 + 7) = 56 in " temperini"

o anche 28 × 3 - 7 × 4 = 56 in " temperini".

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Il contorno del rettangolo misura 56 in temperini" con spiegazione chiara e completa e impostazione corretta dei calcoli

3 Risposta corretta, ma con spiegazione poco chiara o incompleta

2 Risposta "8", ricavata contando il numero di lati del quadrato contenuti nel contorno del rettangolo
oppure "16", purché sia chiaro l'utilizzo di una diversa unità di misura: il segmento tra due puntini consecutivi, cioè metà del lato del quadrato
oppure risposta con errore di calcolo, ma ragionamento corretto

1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure inizio di ragionamento corretto, che mostri la comprensione del metodo di misurazione con l'unità non convenzionale

0 Incomprensione del problema

4. NUMERI IN CASELLE (Cat. 3, 4, 5)

In una classe la maestra ha preparato tante strisce di carta e le ha incollate su una parete dell'aula una accanto all'altra. Ogni striscia contiene sedici caselle uguali fra loro.

Sulla prima striscia Andrea ha scritto in ordine i numeri da 0 a 15, sulla seconda Ida ha scritto quelli da 16 a 31.

Sonia ha completato la quinta striscia.

Teo sulla sua striscia ha già scritto i numeri da 128 a 143.

Scrivete in ordine tutti i numeri che Sonia ha scritto sulla quinta striscia.

Che posto occupa la striscia di Teo?

Spiegate come avete ragionato per trovare le risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Data la sequenza ordinata dei numeri naturali, suddivisa in sequenze da 16 numeri, trovare quali numeri contiene la quinta sequenza, e quale sequenza contiene i numeri da 128 a 143.

Appropriazione del compito

Capire come sono costruite le strisce di numeri: la prima inizia da 0, ogni striscia contiene 16 numeri; i numeri sono consecutivi, senza ripetizioni.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Scrivere materialmente la linea dei numeri partendo da zero e dividendola in gruppi da 16: si ottengono strisce così costruite: n.1 - da 0 a 15; n. 2 - da 16 a 31; n. 3 - da 32 a 47; n. 4 - da 48 a 63; n. 5 - da 64 a 79; n. 6 - da 80 a 95; n. 7 - da 96 a 111; n. 8 - da 112 a 127; n. 9 - da 128 a 143.

Pertanto, la striscia di Sonia contiene i numeri da 64 a 79, cioè 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79. La striscia di Teo è la nona.

Strategia n. 2

Scoprire che le strisce iniziano con i numeri 0, 16, 32 eccetera, cioè la prima con lo 0, poi ci sono i multipli di 16. La quinta striscia inizia con il quarto multiplo di 16, cioè 64, e termina con 79, che può essere trovato o col conteggio oppure pensando che è il numero che precede 80, con cui inizia la striscia successiva. Per trovare in che posto sta la striscia di Teo si può calcolare 128 : 16 = 8, e dedurne che è la nona striscia, considerando che la prima è da 0 a 16, quindi va aggiunta al risultato della divisione, oppure pensare che la striscia successiva inizia con 144, che 144 : 16 = 9 e quindi la striscia successiva è la decima e quella di Teo è la nona.

Si possono trovare anche strategie miste.

Attribuzione dei punteggi

4 Le due risposte corrette "Nella quinta striscia ci sono i numeri 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79; la striscia di Teo è la nona" con procedimento ben argomentato

3 Le due risposte corrette con spiegazione poco chiara
oppure una sola risposta corretta ben argomentata e l'altra errata per un errore di conteggio o di calcolo

2 Una sola risposta corretta argomentata e l'altra mancante
oppure due risposte ben argomentate, ma non corrette per errori di calcolo o di conteggio

1 Solo le due risposte corrette senza spiegazione
oppure inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

5. STORIE DI MAGHI (Cat. 3, 4, 5)

Per preparare una pozione magica Mago Merlino e Maga Magò devono versare dell'acqua in due pentoloni, uno piccolo e uno grande.

Nel pentolone piccolo devono versare esattamente 11 litri d'acqua, in quello grande esattamente 38 litri.

Mago Merlino ha a disposizione dei contenitori da 3 litri, Maga Magò ha dei contenitori da 5 litri.

Per riempire il pentolone piccolo Mago Merlino versa due contenitori da 3 litri, poi Maga Magò versa un contenitore da 5 litri.

A questo punto Mago Merlino dice:

"Ho capito che per riempire completamente il pentolone grande ci sono più modi."

Trovate tutti i modi in cui Mago Merlino e Maga Magò possono versare nel pentolone grande esattamente 38 litri d'acqua utilizzando i loro contenitori.

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi positivi di 3 e 5 la cui somma sia 38.

Appropriazione del compito

Capire che il pentolone viene riempito travasando contenitori da 3 litri e contenitori da 5 litri e che per dare la risposta occorre trovare tutti i modi di ottenere 38 sommando multipli di 3 e di 5.

Possibili strategie

Strategia n. 1
Elencare o rappresentare tutti i multipli di 5 e tutti i multipli di 3 minori di 38. Cercare tutte le coppie costituite da un multiplo di 3 e un multiplo di 5 che diano come somma 38. Si ottengono così le tre soluzioni: 7 contenitori da 5 litri e 1 contenitore da 3 litri; 4 contenitori da 5 litri e 6 contenitori da 3 litri; 1 contenitore da 5 litri e 11 contenitori da 3 litri.

Strategia n. 2
Scrivere tutti i multipli di 3 minori di 38, per ciascuno di essi calcolare quanto manca per arrivare a 38. Verificare se questa differenza è multiplo di 5 oppure no. Se lo è si deduce una soluzione.
Analogamente si può partire dai multipli di 5 e per ciascuno di essi calcolare quanto manca per arrivare a 38. Verificare se questa differenza è multiplo di 3 oppure no. Se lo è, si deduce una soluzione. Ad esempio, partendo dai multipli di 3:
36 (oppure $3 \times 12 = 36$) non va bene perché mancano 2 litri; con 33 (oppure $3 \times 11 = 33$) rendersi conto che manca solo un contenitore da 5 litri, quindi 11 contenitori da 3 litri e 1 da 5 litri è una soluzione. Procedendo in questo modo si determinano le altre soluzioni e si dimostra che ce ne sono solo altre due: 6 contenitori da 3 litri e 4 contenitori da 5 litri; 1 contenitore da 3 litri e 7 contenitori da 5 litri.

Strategia n. 3
Rendersi conto che 30 litri si possono ottenere con 10 contenitori da 3 litri oppure con 6 contenitori da 5 litri e di conseguenza gli 8 litri che mancano si ottengono con 1 contenitore da 5 litri ed uno da 3 litri. Determinare quindi due soluzioni: 11 contenitori da 3 litri e un contenitore da 5, oppure 7 contenitori da 5 litri e un contenitore da 3. Per cercare eventuali altre soluzioni, si può procedere con tentativi organizzati come in strategia 2, scartando i casi già individuati. Oppure capire che 15 litri si ottengono da 5 contenitori da 3 litri, i rimanenti 23 litri si ottengono con 4 contenitori da 5 litri e 1 da 3 litri; quindi, un'altra soluzione è 6 contenitori da 3 litri e 4 da 5 litri. Continuare la ricerca e rendersi conto che non esistono altre possibilità diverse da quelle già individuate.

Attribuzione dei punteggi

4 Le tre soluzioni "Nel pentolone grande possono versare 7 contenitori da 5 litri e 1 contenitore da 3 litri; 4 contenitori da 5 litri e 6 contenitori da 3 litri; 1 contenitore da 5 litri e 11 contenitori da 3 litri" con spiegazione esauriente ed esplicitati tutti i calcoli

3 Le tre soluzioni mediante tentativi, con spiegazione incompleta, oppure le tre soluzioni con un errore di calcolo, ma con i tentativi, oppure due soluzioni con spiegazione esauriente

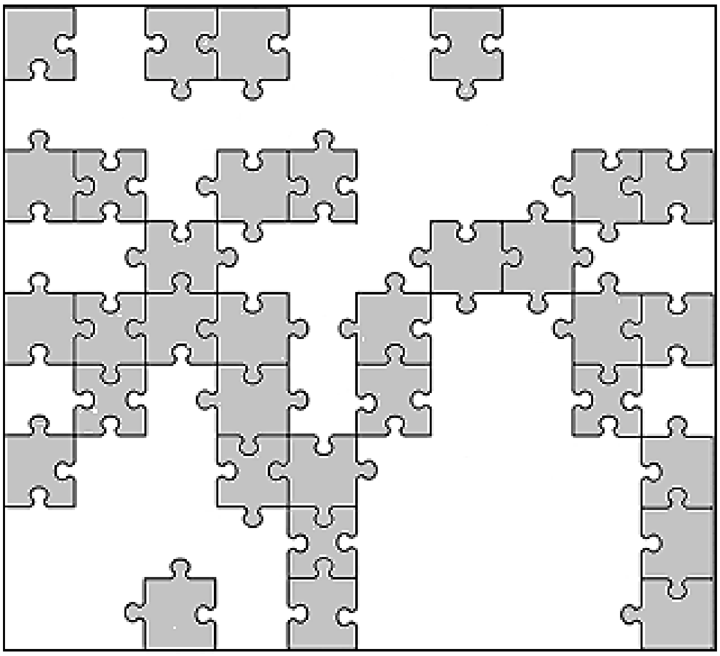
2 Due soluzioni corrette con spiegazione incompleta, oppure con un errore di calcolo

1 Una sola soluzione corretta con calcoli, oppure inizio di ricerca con tentativi corretti che non conducono però alla soluzione, oppure le tre soluzioni senza alcuna spiegazione, né calcoli

0 Incomprensione del problema

6. I PEZZI MANCANTI (II) (Cat. 4, 5)

Sara e Giovanni stanno componendo un puzzle e hanno già collocato dei pezzi come si vede in figura:



Decidono poi di dividere il puzzle a metà, una parte a destra e una a sinistra. Giovanni dovrà completare una metà e Sara l'altra metà.

Giovanni però ha poco tempo: riesce a mettere solo la metà dei pezzi che mancano per completare la sua parte e chiede a Sara di terminare l'intero puzzle.

Giovanni doveva completare la metà di destra o quella di sinistra?

Quanti pezzi ha dovuto sistemare Sara per terminare il puzzle?

Spiegate come avete ragionato per trovare le risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Individuare qual è la metà di un puzzle 10 × 9 a cui manca un numero pari di pezzi ancora da sistemare e determinare il numero totale dei pezzi mancanti.

Appropriazione del compito

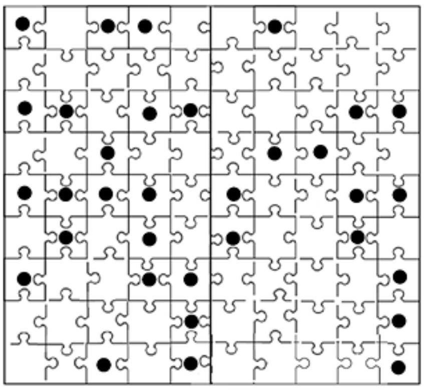
Comprendere la situazione descritta nell'enunciato: il puzzle rappresentato è incompleto, ma è possibile ricostruire le sue dimensioni totali.
Individuare le due metà di destra e di sinistra che devono completare i due amici.
Comprendere che la parte di Giovanni deve avere un numero pari di pezzi mancanti, poiché ne posiziona solamente metà.
Comprendere che occorre addizionare il numero dei pezzi mancanti nella parte di Sara alla metà dei pezzi che mancano nella parte di Giovanni.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Osservando l'immagine, verificare che i pezzi già collocati sono 33, comprendere che il puzzle intero è uno schieramento di 10 × 9 = 90 pezzi e quindi i pezzi mancanti sono in tutto 90 – 33 = 57.

Suddividere il puzzle verticalmente: ciascuna metà è formata da 45 pezzi (90 : 2).



Osservare che a destra sono posizionati 13 pezzi, quindi ne mancano 45 – 13 = 32, mentre a sinistra ci sono 20 pezzi e ne mancano 45 – 20 = 25.

Giovanni posiziona nella sua parte solo la metà dei pezzi mancanti; quindi, il numero dei pezzi mancanti deve essere pari. La parte di Giovanni è quella a destra, perché mancano 32 pezzi, perciò Giovanni è riuscito a collocare (32 : 2 = 16) pezzi.

Concludere che Sara deve posizionare complessivamente 41 (= 25 + 16). pezzi per completare l'intero puzzle.

Strategia n. 2

Risolvere la situazione attraverso una procedura di conteggio: suddividere a metà il puzzle rappresentato, contare i pezzi che mancano nelle due metà (25 e 32) e capire che quella di Giovanni è quella in cui manca un numero pari di pezzi. Concludere che quando Giovanni interrompe il lavoro mancano ancora 16 pezzi da posizionare. Calcolare poi 16 + 25 per determinare il numero dei pezzi che ha posizionato Sara.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette "Giovanni deve completare la parte a destra, Sara dovrà posizionare 41 pezzi" rappresentate in forma verbale o con un disegno, con spiegazione chiara e completa anche relativamente alla discriminante pari/dispari

3 Risposte corrette con spiegazione incompleta
oppure spiegazione chiara, ma una o entrambe le risposte errate a causa di un errore di calcolo o di conteggio

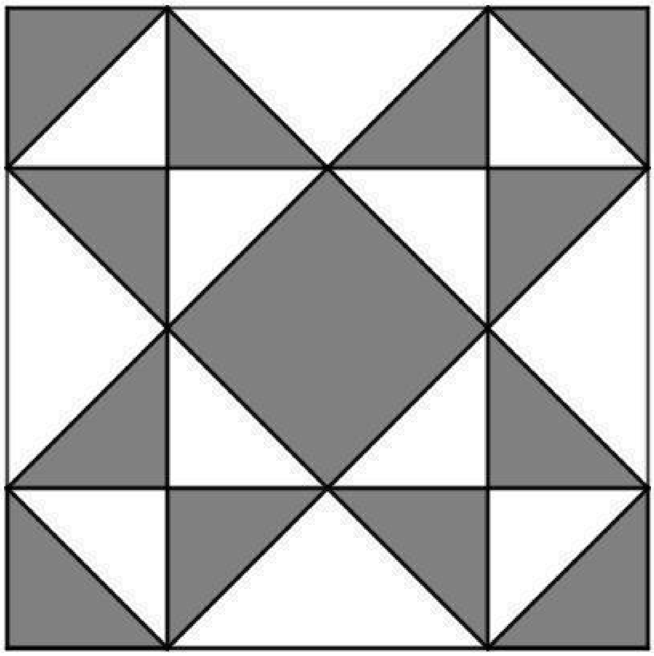
2 Risposte corrette, ma senza la motivazione esplicita dell'attribuzione della parte a destra
oppure procedimento corretto e attribuzione motivata della parte a destra ma non esplicitato il numero dei pezzi che Sara deve collocare

1 Risposte corrette senza spiegazione
oppure inizio corretto di ricerca: individuazione del numero totale dei pezzi e, per ogni parte, del numero dei pezzi già collocati e di quelli mancanti
oppure individuati i numeri dei pezzi collocati e mancanti di ogni parte senza esplicitare il numero totale dei pezzi del puzzle

0 Comprensione soltanto della struttura del puzzle: individuazione del numero totale dei pezzi: 10 × 9 = 90
oppure incomprensione del problema

7. LE PIASTRELLE (Cat. 4, 5, 6)

Lucio e Magda vogliono rifare l'intero pavimento della loro stanza quadrata mantenendo il disegno originale e gli stessi colori.



Le piastrelle che hanno a disposizione sono solo quelle più piccole: triangolari bianche e triangolari grigie.

Magda sostiene che per rifare il pavimento occorrono tante piastrelle bianche quante piastrelle grigie. Lucio non è d'accordo.

Dite chi ha ragione e disegnate il pavimento rifatto.

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Ricostruire una pavimentazione costituita da quadrati e triangoli, utilizzando soltanto triangoli della stessa dimensione, mantenendo la colorazione di due colori.

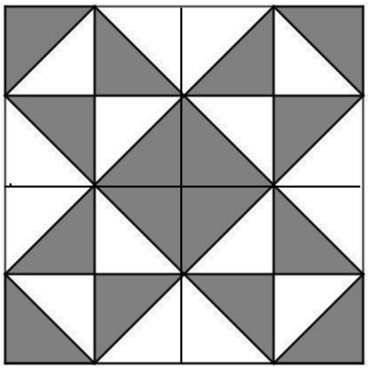
Appropriazione compito

Rendersi conto che le piastrelle della pavimentazione sono di due forme geometriche: triangolo rettangolo isoscele (piccolo e grande) e quadrato.

Rendersi conto che i triangoli rettangoli piccoli, grigi e bianchi, sono tutti uguali fra loro ed anche i triangoli rettangoli grandi sono tutti uguali fra loro. Inoltre, il quadrato può essere suddiviso in quattro triangoli rettangoli piccoli e ciascuno dei triangoli rettangoli grandi può essere suddiviso in due triangoli rettangoli piccoli.

Possibili strategie

Strategia n. 1



Tracciando le due mediane dell'intero quadrato, si osserva che il pavimento viene suddiviso in triangoli piccoli tutti uguali: il quadrato grigio centrale si suddivide in quattro triangoli rettangoli isosceli congruenti e ognuno dei quattro triangoli rettangoli isosceli bianchi grandi in due triangoli uguali fra loro e ai triangoli grigi. Contare tutti i triangoli rettangoli isosceli che risultano essere 32, 16 grigi e 16 bianchi.

Strategia n. 2

Osservare che l'intero pavimento è diviso dalle mediane in 4 × 4 = 16 quadrati piccoli bicolori.
Osservare che per formare un quadrato piccolo occorrono due triangoli piccoli isosceli, uno grigio e uno bianco. Concludere che il pavimento è formato da 32 triangoli isosceli piccoli di cui 16 bianchi e 16 grigi.

Strategia n. 3

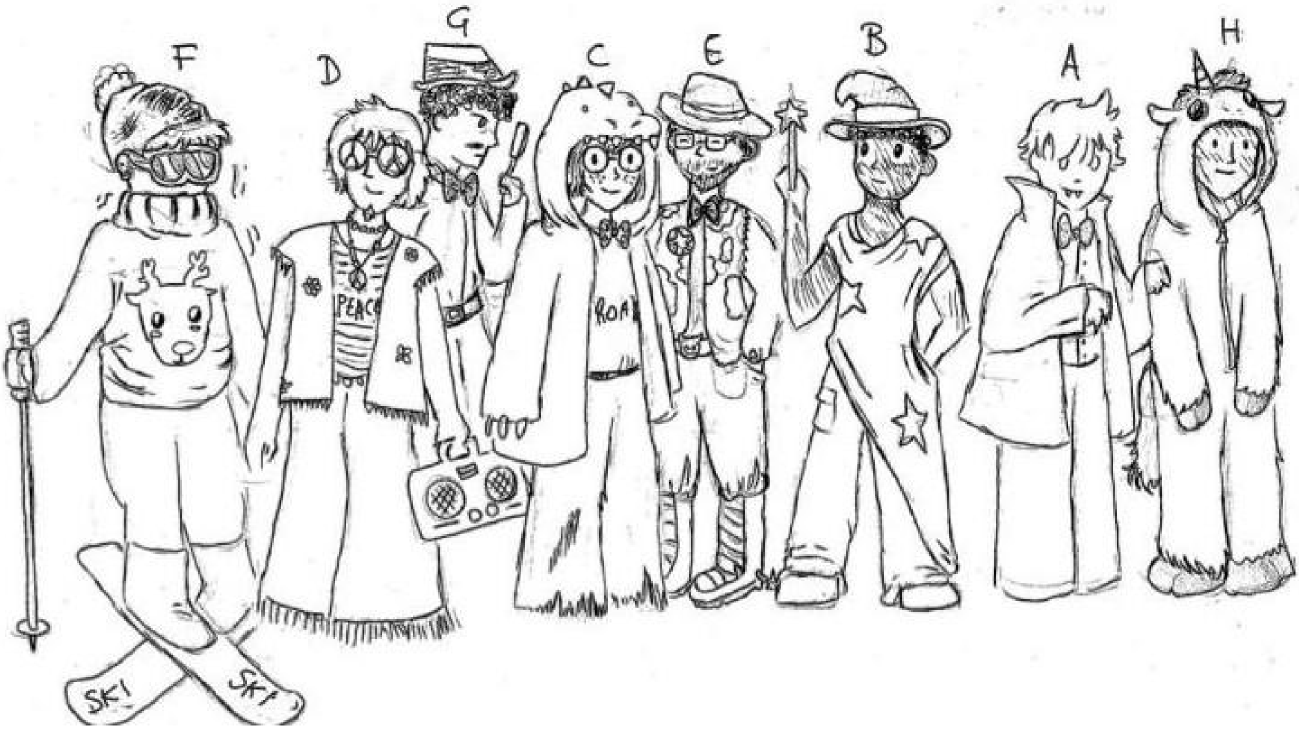
Riconoscere che i quadrati adiacenti al quadrato grigio centrale sono formati da due piastrelle triangolari grigie e da due piastrelle triangolari bianche tutte uguali; quindi, il numero delle grigie è uguale a quello delle bianche. Dividere le piastrelle bianche più grandi in modo da suddividerle in parti congruenti ai triangoli isosceli piccoli. In questo modo due piastrelle triangolari grandi uguagliano in numero le quattro piastrelle grigie agli angoli. Dividendo il quadrato centrale con le diagonali si ottengono quattro triangoli grigi che uguagliano in numero i quattro triangoli bianchi che stanno negli altri due triangoli bianchi grandi.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Ha ragione Magda" con spiegazione completa e chiara del perché il numero di piastrelle bianche e grigie è 16 per entrambe e disegno ben fatto del pavimento
3 Risposta corretta con disegno ben fatto, ma spiegazione poco chiara (senza esplicitare la modalità di conteggio o le relazioni tra i triangoli)
2 Risposta corretta con spiegazione poco chiara (esplicitazione delle relazioni tra i triangoli, oppure modalità di conteggio) senza il disegno del nuovo pavimento
oppure ragionamento e disegno corretto, ma con risposta errata dovuta ad errori di conteggio
1 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure inizio di procedimento (disegno sopra la figura, inizio di conteggio…)
0 Incomprensione del problema

8. FESTA IN MASCHERA (Cat. 5, 6, 7)

Ecco una foto scattata ad una festa mascherata. I partecipanti indicati con le lettere F, G, E e B non hanno voluto togliere il cappello!



Uno dei partecipanti si chiama Michele.

Per individuarlo avete queste indicazioni:

- Michele ha il cappello e gli occhiali
- Michele ha il cappello, il cravattino ed è senza occhiali.

State attenti però, perché in ogni frase c'è un solo indizio falso.

Con quale lettera è stato indicato Michele?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Individuare fra 8 persone, chi ha le caratteristiche descritte dal testo, gestendo proposizioni contenenti negazioni e indizi veri e falsi.

Appropriazione del compito

Decodificare le istruzioni: data una proposizione con due indizi e una seconda proposizione con tre indizi, comprendere che in ciascuna di esse è presente un solo indizio falso, mentre gli altri sono veri.
Capire che occorre osservare attentamente i personaggi mascherati rappresentati in figura per individuare quello che soddisfa alle indicazioni delle affermazioni.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Dalla prima frase possiamo dedurre che l'amico porta o gli occhiali o il cappello, uno dei due ma non entrambi. Perciò si possono scartare E e F, A e H. Restano B, C, D, G.

Analizzando le possibilità rimaste, occorre scartare subito la G, altrimenti gli indizi della seconda proposizione risulterebbero tutti e tre veri, contrariamente all'affermazione che uno è falso.
Occorre scartare anche la possibilità D, altrimenti tutti gli indizi della seconda proposizione risulterebbero falsi. Restano soltanto gli individui identificati con B e C.
Infine, occorre scartare la possibilità C, perché risultano falsi due indizi della seconda proposizione (con cravattino e con occhiali, senza cappello).
Ne consegue che Michele è quello rappresentato dal personaggio indicato con la lettera B: senza cravattino, con cappello e senza occhiali.

Strategia n. 2

Si possono analizzare le caratteristiche di ogni partecipante alla festa, uno ad uno, finché si trova quello che corrisponde alle consegne, ad esempio D non è Michele: ha occhiali e non cappello: coerente con la prima frase, un indizio vero (ha occhiali) e uno falso (perché non ha cappello) ma non soddisfa alle informazioni della seconda frase: tutti e tre gli indizi sono falsi.

Strategia n. 3

Rendersi conto che, se l'affermazione "avere il cappello" è quella vera nella prima frase, è dunque falsa "ha gli occhiali", lo è anche nella seconda. Quindi nella seconda le due affermazioni vere sono "è senza occhiali" e "ha il cappello". L'unico personaggio con il cappello, senza occhiali e senza cravattino è il B.
Se invece l'indizio della prima frase "avere il cappello" è quello falso (dunque è vero "ha gli occhiali"), nella seconda frase è falso l'indizio "è senza occhiali", dunque sono veri gli indizi "ha il cravattino" ed "ha il cappello", ma quest'ultimo è in contraddizione con l'avere supposto che "avere il cappello" è falso. Si conclude che "avere il cappello" è un indizio vero in entrambe le frasi.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Michele è indicato con la lettera B" con argomentazione chiara e completa che escluda altre possibilità
3 Risposta corretta con argomentazione incompleta o poco chiara oppure senza il controllo dell'unicità
2 Risposta coerente solo con una delle due informazioni che porta ad una risposta errata oppure a non individuare in modo univoco Michele
1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione, oppure inizio di analisi che dimostri la comprensione della situazione
0 Incomprensione del problema

9. ALLA PLAYSTATION (I) (Cat. 5, 6, 7)

Amedeo e Berta stanno giocando alla playstation. Nel gioco ciascuno di loro deve partire dal proprio pianeta e raggiungere quello dell'avversario utilizzando un razzo. Entrambi i razzi viaggiano sempre alla stessa velocità.
Sullo schermo c'è un cronometro che segna i minuti e i secondi di precedenti partite e che non può essere azzerato. Amedeo e Berta iniziano il gioco cliccando nello stesso momento; perciò, i razzi partono insieme e si incrociano a metà strada quando il cronometro segna 10 minuti e 0 secondi. Il razzo di Amedeo raggiunge il pianeta di Berta quando il cronometro segna 12 minuti e 15 secondi.

Quanti minuti e quanti secondi segnava il cronometro quando il razzo di Berta è arrivato sul pianeta di Amedeo?

Quanti minuti e quanti secondi segnava il cronometro nel momento in cui hanno cliccato per cominciare a giocare?

Spiegate come avete ragionato per trovare le risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Saper gestire le relazioni fra distanze e tempi in una situazione di velocità uniforme.

Appropriazione del compito

Capire che i due razzi partono nello stesso momento e che si incontrano a metà strada.
Capire che, viaggiando alla stessa velocità, il tempo che hanno impiegato a percorrere la seconda metà del tragitto deve essere uguale a quello impiegato a percorrere la prima metà.

Possibili strategie

Dopo aver percorso metà strada, quando i due amici si incontrano, il razzo di Amedeo ha raggiunto il pianeta di Berta dopo 2 min e 15 s (12 min 15 s – 10 min; lo stesso tempo avrà impiegato il razzo di Berta ad arrivare al pianeta di Amedeo. Quindi anche il razzo di Berta arriva sul pianeta di Amedeo quando il cronometro segna 12 min e 15 s.

La strategia può essere descritta a parole oppure rappresentata graficamente, ad esempio così:

A —------------------------------- M —-----------------------------------B

pianeta di Amedeo	metà strada	pianeta di Berta
	punto di incontro 10 min	il razzo di Amedeo arriva quando il cronometro segna 12 min e 15 s.

Il tempo necessario per percorrere l'intero tragitto è il doppio di 2 min e 15 s, quindi 4 min e 30 s.

Il cronometro al momento della partenza segnava la differenza fra 12 min e 15 e 4 min e 30 s, cioè 7 min e 45 s.

Oppure, dato che si sono incontrati a metà strada, erano partiti 2 min e 15 s prima dei 10 min segnati sul cronometro; perciò, quando il cronometro segnava 7 min e 45 s.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette "Il razzo di Berta è arrivato quando il cronometro segnava 12 minuti e 15 secondi e il cronometro alla partenza segnava 7 minuti e 45 secondi" con procedimento ben argomentato, in relazione a ciascuna delle due domande

3 Le due risposte corrette con spiegazione poco chiara
oppure la prima risposta corretta e la seconda errata per un solo errore nel calcolo, con spiegazione chiara e completa

2 Risposta corretta solo ad una domanda con spiegazione chiara
1 Risposta corretta ad una o ad entrambe le domande senza alcuna spiegazione oppure inizio di ragionamento corretto
0 Incomprensione del problema

10. WINDSURF (I) (Cat. 6, 7)

Aldo ha realizzato una nuova vela per il suo windsurf utilizzando due pezzi di stoffa, uno di colore blu e uno di colore giallo.
In ciascun pezzo di stoffa ha tagliato due triangoli non rettangoli congruenti fra loro, con due lati di 5 metri ed il terzo lato più lungo. Per formare la vela ha poi unito i due triangoli lungo uno dei lati di 5 metri.
Ora Aldo vuole mettere un nastro lungo tutto il perimetro della vela. Ha a disposizione tre nastri, uno rosso lungo 15 m, uno verde lungo 22 m e uno viola lungo 30 m, ma solo uno di questi è lungo esattamente quanto il perimetro della vela.

Quanto è lungo il terzo lato di ciascuno dei due triangoli che formano la vela che Aldo ha realizzato?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

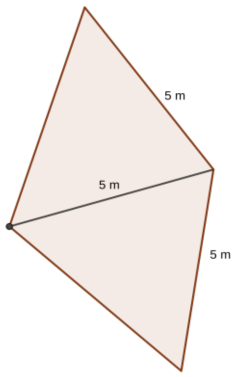
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare la misura del terzo lato di due triangoli isosceli congruenti conoscendo il perimetro del poligono formato dai due triangoli uniti lungo uno dei lati congruenti.

Appropriazione del compito

Capire che il terzo lato di ciascuno dei due triangoli dovrà misurare più di 5 metri e meno di 10 (se misurasse 10 metri si otterrebbe un triangolo degenere).
Comprendere che accostando i due triangoli lungo uno dei lati di 5 metri si ottiene un quadrilatero.
Capire che occorre scegliere fra tre misure assegnate quella corrispondente al perimetro del quadrilatero.



Possibili strategie

Strategia n. 1
Provare per tentativi ad attribuire una misura al terzo lato e verificare quale, fra le tre misure proposte, possa essere quella del perimetro del quadrilatero.
Se il terzo lato misurasse 6 metri, la lunghezza del nastro sarebbe 5 + 5 + 6 + 6 = 22 (in metri).
Se il terzo lato misurasse 7, oppure 8, oppure 9 metri troveremmo rispettivamente come perimetro 24, 26, 28 (in metri), valori non accettabili. Dunque, si conclude che il terzo lato dei due triangoli misura 6 metri.

Strategia n. 2
Eliminare le misure di 15 e 30 metri perché la prima non rispetterebbe la condizione che la misura del terzo lato dei triangoli sia minore di 5 m, la seconda sarebbe incompatibile con le condizioni per l'esistenza di un triangolo. Determinare la misura del terzo lato per via numerica cercando il numero che verifica l'uguaglianza per la misura in metri del perimetro del quadrilatero: 5 + 5 + __ + __= 22, dove i dati incogniti sono la misura del terzo lato e quindi sono due numeri uguali. Si ottiene la misura del terzo lato:
[(22 – 5) – 5] : 2 = 6 (in metri).

Strategia n. 3

Verificare che con le misure trovate il triangolo di partenza sia effettivamente costruibile:

con perimetro di 15 metri la misura del terzo lato in metri sarebbe di [(15 – 5) – 5] = 5 non accettabile perché il terzo lato deve essere più lungo degli altri due;

con perimetro di 22 metri la misura del terzo lato in metri sarebbe di [(22 – 5) – 5] = 6 valore accettabile;

con perimetro di 30 metri la misura del terzo lato in metri sarebbe di [(30 – 5) – 5] = 10 valore non accettabile perché il triangolo degenera.

Perciò il terzo lato di ogni triangolo misura 6 metri.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Il terzo lato di ogni triangolo è lungo 6 metri" e spiegazione chiara e completa del ragionamento fatto per arrivare alla soluzione, (spiegazione dei tentativi, argomentazione dello scarto delle misure non compatibili)

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta, ad esempio senza esplicitazione di tutti i calcoli
oppure analizzati solo due casi

2 Misura del terzo lato non corretta per un solo errore di calcolo, ma con argomentazione valida e percorso completo per il calcolo della misura del lato

1 Risposta corretta senza spiegazione
oppure inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

11. LANCIO DI DADI (Cat. 6, 7, 8)

Valentina e Chiara giocano con tre dadi colorati a sei facce numerate da 1 a 6; un dado è viola, uno è arancione e uno è rosa.

Lanciano a turno i dadi e ogni volta individuano un numero di tre cifre in questo modo:

- la cifra delle centinaia è quella che si legge sulla faccia del dado viola
- la cifra delle decine è quella che si legge sulla faccia del dado arancione
- la cifra delle unità è quella che si legge sulla faccia del dado rosa.

Ad ogni turno di lancio decidono che vince chi ottiene il numero maggiore.

Decidono che, ad ogni turno di lancio, vince chi ottiene il numero maggiore.

Chiara lancia i tre dadi sul tavolo e ottiene il numero 215 (2 con il dado viola, 1 con il dado arancione e 5 con il dado rosa).

Quando è il suo turno, Valentina lancia i tre dadi e scrive il numero ottenuto, poi inavvertitamente fa cadere il dado arancione. Chiara dice: "Che strano, se leggo il numero di due cifre formato dai due dadi rimasti sul tavolo, considerando come cifra delle decine quella sul dado viola, ottengo un nono del tuo numero, Valentina!"

Quale potrebbe essere il numero di tre cifre ottenuto da Valentina? Trovate tutte le possibilità e dite per ognuna di esse a chi spetta la vittoria.

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

In un insieme di sei elementi distinti trovare tre disposizioni di tre elementi con ripetizione, rispettando le relazioni date.

Appropriazione del compito

Comprendere la situazione: le cifre da considerare sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, il numero di tre cifre ottenuto da Valentina è un multiplo di 9 del numero di due cifre rimasto sul tavolo quindi la somma delle tre cifre deve essere 9.

Osservare che la cifra delle unità del numero di tre cifre da determinare è uguale alla cifra dell'unità del numero di due cifre che si legge sul tavolo essendo quella che si legge sul dado rosa.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Procedere per tentativi verificando ogni volta che il numero trovato soddisfi tutte le condizioni. Per esempio: iniziamo supponendo che il numero di due cifre sia 11. Allora il numero di tre cifre dovrebbe essere $9 \times 11 = 99$, ma non è possibile perché le cifre non possono essere né 0 né maggiori di 6. Procedere così con tutti i numeri di due cifre che si possono ottenere con le cifre da 1 a 6, moltiplicarli per 9 e controllare se il risultato soddisfa le condizioni richieste. Si trovano tre possibilità: Valentina con i dadi potrebbe aver ottenuto 135 (vince Chiara), 225 (vince Valentina), 315 (vince Valentina).

In modo analogo, si può partire anche da un numero di tre cifre multiplo di 9 e dividerlo per 9 controllando se il numero di due cifre ottenuto soddisfa le condizioni.

Strategia n.2

Capire che la cifra delle unità, quella del dado rosa, dev'essere necessariamente un 5, infatti dato che il numero di due cifre, moltiplicato per 9 deve avere la stessa cifra delle unità del numero di tre cifre, l'unica possibilità è partire da un numero che termina per 5 (il caso cifra delle unità = 0 non è ammissibile, poiché stiamo lavorando con le cifre da 1 a 6). A questo punto i tentativi da effettuare sono solo sei:

Dado viola	Num di due cifre	Multiplo secondo 9	E' accettabile?
1	15	135	Sì
2	25	225	Sì
3	35	315	Sì
4	45	405	No (contiene la cifra 0)
5	55	495	No (contiene la cifra 9 e la prima cifra è diversa nei due numeri)
6	65	585	No (contiene la cifra 8 e la prima cifra è diversa nei due numeri)

Perciò le possibili soluzioni sono: 135 (vince Chiara), 225 (vince Valentina), 315 (vince Valentina)

Strategia n.3

Indicando rispettivamente con *c, d, u,* i numeri usciti sul dado viola, arancione e rosa e ricordando la scrittura polinomiale di un numero si ha:

$100c + 10d + u = 9\,(10c + u)$ da cui

$10c + 10d = 8u \quad \rightarrow \quad 5(c + d) = 4u$

A questo punto si può stilare l'elenco di tutte le terne possibili e scegliere quelle che soddisfano la relazione oppure stabilire che necessariamente deve essere $u = 5$, in quanto $4u$ dev'essere multiplo di 5, quindi $c + d = 4$.

In ogni caso le soluzioni possibili sono: $u = 5$, $c = 1$ e $d = 3$ oppure $c = 3$ e $d = 1$, oppure $c = d = 2$.

Concludere che con il lancio dei tre dadi Valentina può aver ottenuto uno dei seguenti tre numeri: 135, 225, 315 (405 è da escludere perché il dado non ha una faccia con la cifra 0). Quindi nel primo caso la vittoria spetterebbe a Chiara, negli altri due casi spetterebbe a Valentina.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa con le tre possibilità (135, 225, 315 e la risposta "Vince Valentina se ottiene il numero 225 oppure 315, invece vince Chiara se Valentina ottiene il numero 135") e spiegazione chiara (se risolto per tentativi, esplicitando alcuni tentativi falliti)

3 Le tre possibilità corrette con spiegazione incompleta oppure senza la risposta alla seconda domanda
oppure indicate due possibilità corrette con spiegazione chiara e risposta coerente alla seconda domanda

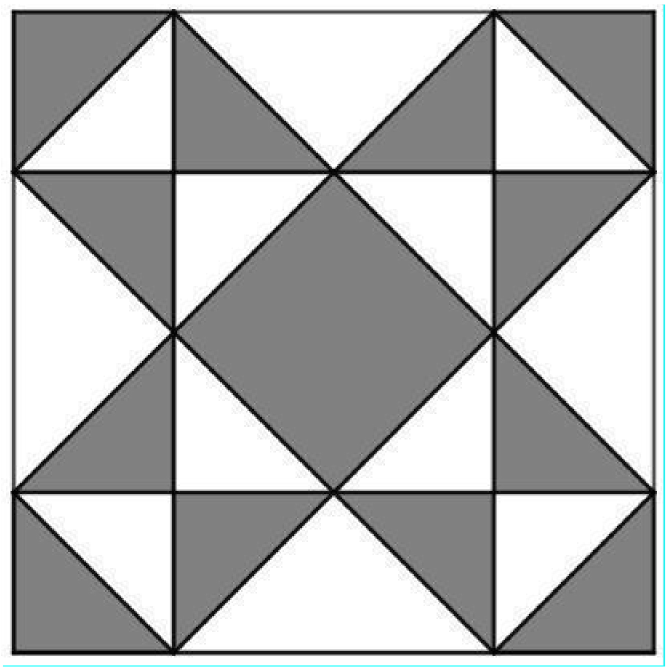
2 Una possibilità corretta con spiegazione chiara e risposta coerente alla seconda domanda
oppure due possibilità corrette con spiegazione incompleta, ma risposta coerente alla seconda domanda
oppure le tre possibilità corrette senza spiegazione, ma risposta coerente alla seconda domanda

1 Una possibilità corretta con spiegazione incompleta con o senza risposta coerente alla seconda domanda
oppure una o due soluzioni trovate senza spiegazione con o senza risposta coerente alla seconda domanda
oppure tentativi coerenti con l'enunciato ma non terminati

0 Incomprensione del problema

12. LE MATTONELLE (Cat. 7, 8)

Lucio osserva il disegno del pavimento di una stanza riprodotto in questa immagine.



Sapendo che il lato della mattonella grigia centrale misura 1 metro, Lucio riesce a calcolare l'area e il perimetro dell'intero pavimento.

Quali sono le misure dell'area e del perimetro del pavimento della stanza? Esprimete il risultato con un'approssimazione al centimetro.

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Calcolare area e perimetro di un pavimento quadrato di una stanza, piastrellato con mattonelle triangolari e una mattonella quadrata centrale, conoscendo la misura del lato della mattonella quadrata.

Appropriazione del compito

Osservare il disegno e rendersi conto che il pavimento ha una forma quadrata.
Capire che le mattonelle sono di due forme geometriche: triangolo rettangolo isoscele (piccolo e grande) e quadrato.
Capire che per calcolare l'area e il perimetro del pavimento basta determinarne la misura di un lato.
Capire che occorre determinare la misura del cateto di un triangolo piccolo a partire dalla misura del lato della mattonella quadrata centrale.
Individuare le relazioni fra le diverse mattonelle: i triangoli rettangoli piccoli, grigi e bianchi, sono tutti uguali fra loro ed anche i triangoli rettangoli grandi sono tutti uguali. I triangoli rettangoli isosceli grandi si possono suddividere in due triangoli rettangoli isosceli piccoli di area minore e il quadrato si può suddividere in due triangoli rettangoli isosceli grandi e quindi in quattro piccoli.

Possibili strategie per il calcolo dell'area

Strategia n. 1

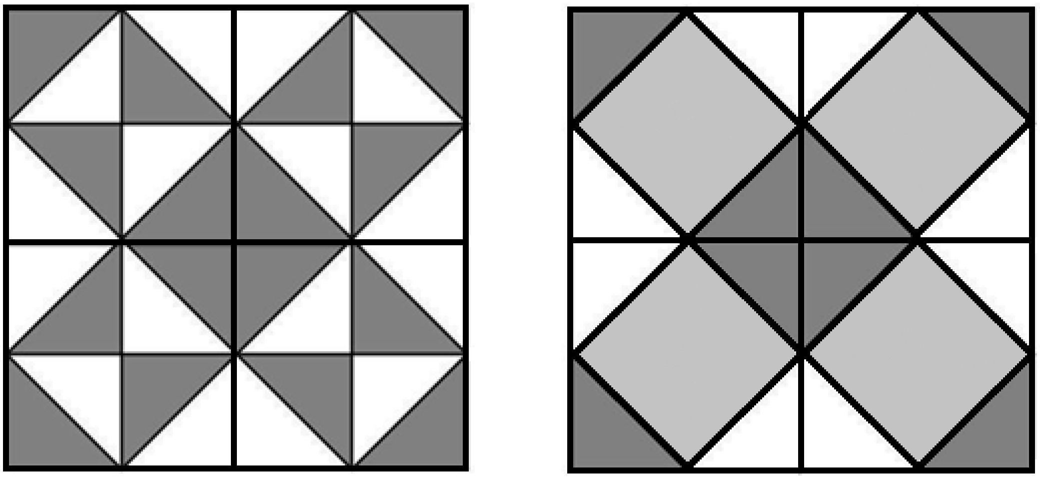
Suddividere a metà i triangoli rettangoli isosceli grandi e osservare che ogni metà è un triangolo rettangolo isoscele congruente ai triangoli piccoli. Tracciare le diagonali del pavimento e osservare che ognuna delle quattro parti che si ottengono è congruente ad un triangolo rettangolo isoscele piccolo. Contare tutti i triangoli rettangoli isosceli piccoli: sono 32. Poiché Il quadrato grigio al centro della figura è formato da quattro triangoli isosceli piccoli la sua area è 8 volte più piccola dell'area dell'intera mattonella. Poiché l'area del quadrato al centro è $1 \times 1 = 1$ m^2, l'area del pavimento è di 8 m^2.

Strategia n. 2

Osservare che le mediane dividono il pavimento in $4 \times 4 = 16$ quadrati piccoli (formati da due mattonelle triangolari piccole) e che quindi il quadrato centrale contiene due quadrati piccoli. Si conclude che l'area di un quadrato piccolo è ½ m^2 e che l'area del pavimento è $16 \times ½ = 8$ (in m^2).

Strategia n. 3

Osservare che accanto ai lati del quadrato centrale grigio ci sono quattro quadrati ad esso congruenti formati da quattro triangoli isosceli rettangoli piccoli. Tramite conteggio dei triangoli piccoli rimanenti trovare che sono 12 e che possono formare altri tre quadrati uguali ai precedenti. Concludere quindi che sono necessari 8 quadrati per costruire tutta la figura e che quindi l'area richiesta è 8 volte l'area del quadrato centrale grigio.



Strategia 4

Riconoscere che il quadrato centrale grigio di lato 1 m e area 1m^2, ha area che è la metà del quadrato che si ottiene dividendo il pavimento in quattro parti, tramite le mediane. Il pavimento è quindi composto da quattro quadrati, che sono ciascuno il doppio di 1 m^2, cioè 2 m^2; concludere che l'area totale è perciò 4 m^2 $\times 2 = 8$ m^2.

Possibili strategie per il calcolo del perimetro

Per calcolare il perimetro del pavimento è utile sapere che il rapporto tra la diagonale di un quadrato e il proprio lato è $\sqrt{2}$, (circa 1,41). Altrimenti di può determinare il cateto del triangolo rettangolo piccolo applicando il teorema di Pitagora: $c^2 + c^2 = 1$ da cui $c = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

Strategia n. 1

Trovata l'area del pavimento 8 m^2 (vedi la prima richiesta del problema), procedere al calcolo del lato con la radice quadrata e determinare il perimetro, moltiplicandolo per quattro: $4\sqrt{8} = 8\sqrt{2} = \sqrt{128} \cong 11{,}31$ (in metri).

Strategia n. 2

Osservare che il lato del pavimento è il doppio della diagonale della mattonella grigia, che misura $\sqrt{2}$ m, quindi il lato del pavimento misura $2\sqrt{2}$ m e il perimetro $8\sqrt{2} \cong 11{,}28$ (in metri).

Strategia n. 3

Osservare che, se il lato del quadrato grigio al centro della figura è 1 m, allora la diagonale del pavimento è il quadruplo, cioè, è 4 m. Allora il lato misura 4 : $\sqrt{2}$ $\cong$ 2,83 (in metri) Pertanto, il perimetro sarà circa 11,32 m.

Strategia n. 4

Poiché il quadrato è un rombo con le diagonali congruenti, con la formula A = (d × d)/2 calcolare, conoscendo l'area, la misura della diagonale del pavimento $\sqrt{2 \times 8}$ = 4, da cui il lato è 4 : $\sqrt{2}$ $\cong$ 2,83 (in metri). Pertanto, il perimetro sarà circa 11,32 m.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette "Area 8 m^2 e perimetro $8\sqrt{2}$ oppure, se espresso in decimale, con misura compresa nell'intervallo tra 11,28 e 11,32 m, con approssimazione corretta e consapevole e con spiegazioni complete e corrette

3 Risposte corrette relative a perimetro e area, ma con spiegazione incompleta anche solo per una delle due richieste

2 Solo una risposta corretta con una descrizione chiara e completa del procedimento e l'altra risposta mancante oppure sbagliata per un errore nel calcolo o nell'approssimazione
oppure procedura corretta sia per il calcolo del perimetro che dell'area, anche se con errori di calcolo o di approssimazione

1 Almeno una risposta corretta senza spiegazioni
oppure inizio di procedimento corretto (includiamo in questo caso anche un inizio di procedimento con misura sulla figura)

0 Incomprensione del problema

13. BIGLIE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Alfredo, Benny e Caio stanno giocando a biglie, ciascuno porta con sé il suo sacchettino.

Il numero di biglie di Benny è il doppio del numero delle biglie di Alfredo mentre le biglie di Caio sono il triplo di quelle di Alfredo. Nel corso del gioco Alfredo vince: Caio gli deve dare 11 biglie e Benny gliene deve dare 3.

Adesso è Caio ad avere meno biglie di tutti.

Quante biglie potrebbe avere ora Alfredo?
Trovate tutte le possibilità.

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Dati tre gruppi di oggetti, determinare il numero degli oggetti di ogni gruppo rispettando i vincoli finali e iniziali.

Appropriazione del compito

Capire le relazioni iniziali fra i numeri delle biglie dei tre ragazzi e gli spostamenti delle biglie che portano alla situazione finale.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Procedere ipotizzando il numero di biglie di Alfredo, e di conseguenza degli altri due amici. Eventualmente accorgersi che Alfredo deve avere almeno 4 biglie, perché Caio, che ne ha il triplo, ne deve avere almeno 11, per poterle cedere ad Alfredo; questo contribuisce a limitare il numero dei tentativi.

Conviene procedere con una ricerca ordinata, incrementando via via il numero delle biglie, a partire da quelle di Alfredo.

Le successive terne ordinate indicano il numero delle biglie di ciascuna persona nella fase iniziale, nell'ordine (Alfredo, Benny, Caio) e il numero di biglie dopo lo spostamento:

(4, 8, 12) alla fine del gioco diventa (4 + 3 + 11, 8 – 3, 12 – 11) = (18, 5, 1) che verifica la consegna: Caio ha meno biglie rispetto agli altri, quindi 18 è una soluzione.
(5, 10, 15) dopo gli spostamenti diventa (19, 7, 4), terna accettabile che porta alla soluzione 19
(6, 12, 18) diventa (20, 9, 7) terna accettabile con soluzione 20
(7, 14, 21) diventa (21, 11, 10) terna accettabile con soluzione 21
(8, 16, 24) diventa (22, 13, 13) terna non accettabile poiché Caio avrebbe lo stesso numero di biglie di Benny.
(9, 18, 27) diventa (23, 15, 16) terna non accettabile poiché Caio avrebbe più biglie di Benny
aumentando di una unità le biglie di Alfredo, quelle di Benny aumentano di due unità e quelle di Caio di tre unità; quindi, dall'ultima terna in avanti non si troveranno più soluzioni, perciò le possibilità sono quattro: 18, 19, 20, 21.

Strategia n. 2

Impostare un sistema di disequazioni:
Benny deve avere almeno 3 biglie, Caio almeno 11.
Prima degli spostamenti. Indicato con x il numero delle biglie di Alfredo, gli amici possiedono rispettivamente x, $2x$, $3x$ biglie.
Alla fine del gioco i numeri delle biglie diventano $x + 3 + 11 = x + 14$ per Alfredo, $2x – 3$ per Benny, $3x – 11$ per Caio.
I vincoli essenziali (tolto $x + 14$ che è sempre positivo essendo x positivo), sono:

$2x - 3 > 0$
$3x - 11 > 0$
$3x - 11 < 2x - 3$
$3x - 11 < x + 14$

che costituiscono un sistema di disequazioni che ha per possibili soluzioni naturali di x: 4, 5, 6, 7 che corrispondono ai contenuti del sacchetto di Alfredo dopo gli spostamenti pari a 18, 19, 20, 21.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta “18, 19, 20, 21” con spiegazioni chiare e complete e la verifica che non ci sono altre soluzioni

3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare, oppure senza la verifica che le soluzioni sono solo quattro

oppure procedimento corretto, risposta ben spiegata ma che indica come soluzioni i contenuti del sacchetto di Alfredo prima degli spostamenti

oppure soltanto tre soluzioni con procedura ben argomentata

oppure le soluzioni corrette ben argomentate con l’aggiunta della possibilità 22

2 Solo due soluzioni con procedura argomentata,

oppure percorso corretto con errori di calcolo

oppure risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare con l’aggiunta della possibilità 22

1 Risposta corretta senza spiegazione, né giustificazione

oppure inizio di ricerca coerente

0 Incomprensione del problema

14. WINDSURF (II) (Cat. 8, 9, 10)

Aldo sta realizzando una vela triangolare per il suo windsurf, con due lati che misurano 5 metri ciascuno. Per tagliare la vela, deve definire la misura del terzo lato, che vuole sia un numero intero e il più grande possibile. Si accorge però che questo numero porterebbe ad una vela che male si adatterebbe al suo windsurf, decide allora di ridurre questa misura ai 2/3 di quella iniziale.
Aldo ha a disposizione un rotolo di tela alta 2 m, dovrà quindi unire due o tre pezzi di tela fissandoli uno accanto all'altro con uno speciale nastro adesivo, per ottenere una vela adeguatamente efficiente.
Determinare il minimo numero di metri di tela che Aldo dovrà tagliare.

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare quanti metri occorrono come minimo per costruire una vela triangolare incollando fra loro al massimo tre strisce di stoffa di cui si conosce l'altezza.

Appropriazione del compito

Capire che, per determinare la misura della base di un triangolo isoscele conoscendo la misura degli altri due lati, occorre applicare la disuguaglianza triangolare.
Capire che occorre poi scomporre il triangolo in tre figure al massimo che abbiano tutte una delle dimensioni uguale a 2 m.

Possibili strategie

Per la disuguaglianza triangolare, il terzo lato del triangolo deve misurare meno di 10 metri e, poiché deve essere la massima misura intera possibile, deve essere lungo 9 metri. Poiché successivamente vuole ridurre tale misura di un terzo, occorre togliere da 9 la sua terza parte, cioè 3, dunque la misura definitiva del terzo lato è 6 metri.
Trovare la misura dell'altezza (4 m) relativa alla base applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo, metà di quello isoscele, oppure riconoscendo la terna pitagorica 3-4-5.
A questo punto, iniziare la ricerca della scomposizione ottimale per il ritaglio da un rettangolo di stoffa alto 2 m.
Calcolare le misure dei vari segmenti in cui si può decomporre la figura, e valutare, per ciascuna possibilità, la lunghezza della "striscia" da tagliare, alta 2m.

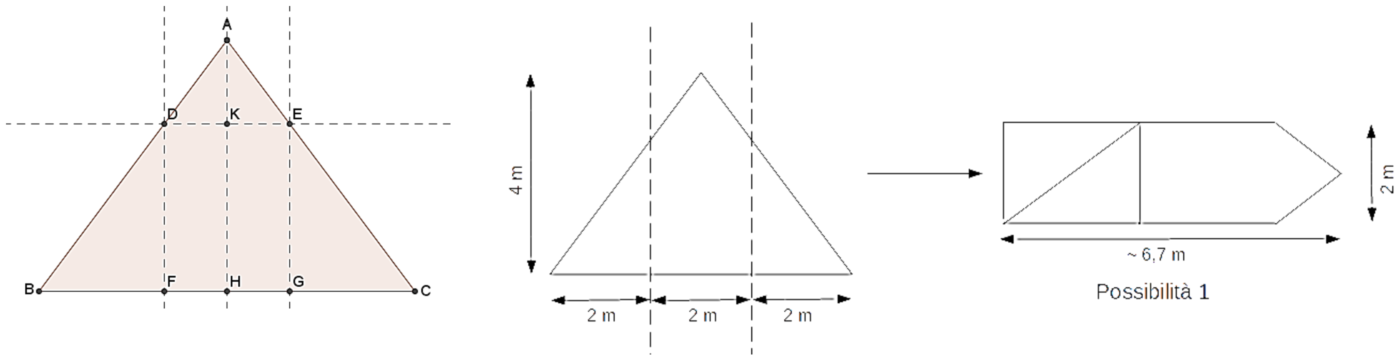
Possibilità 1 (le misure sono in metri)

Capire che la vela può essere suddivisa in tre parti larghe 2 m ognuna (due triangoli rettangoli congruenti e un pentagono) con dei tagli paralleli all'altezza del triangolo.

Calcolare la lunghezza del cateto maggiore dei triangoli (DF) utilizzando la similitudine tra i triangoli AHB e DFB:

DF : AH = BF : BH, da cui DF : 4 = 2 : 3 , da cui $DF = 8/3 \approx 2,7$ m. Disporre infine i pezzi in modo da ricavarli dal rotolo di stoffa usando il meno possibile (come in figura).

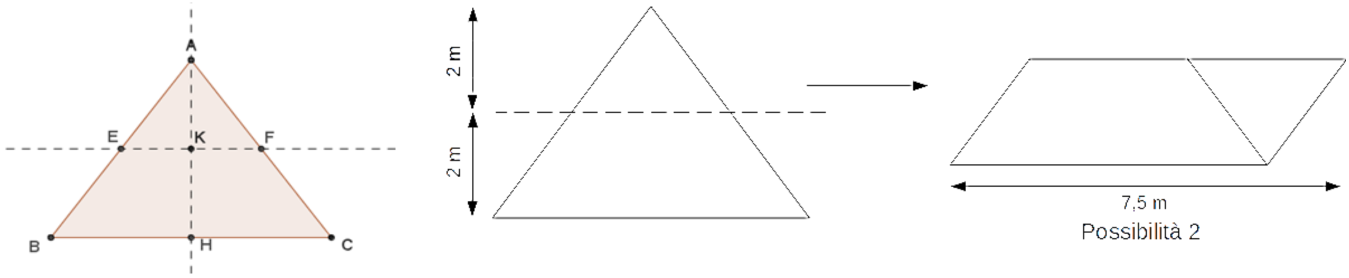
Calcolare infine la lunghezza minima di stoffa da tagliare dal rotolo: $4 + 2,7 = 6,7$ m (approssimando al decimetro).



Possibilità 2

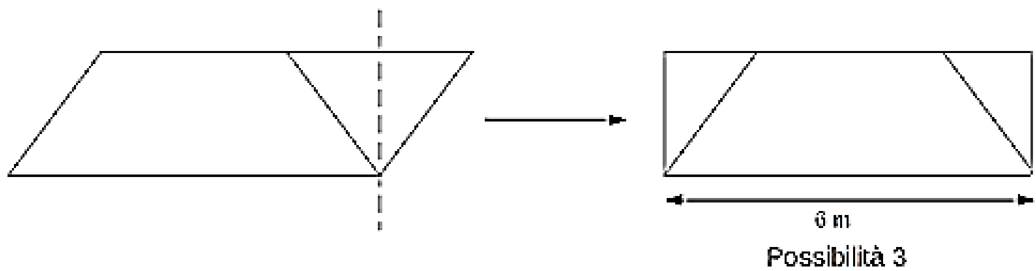
Considerare alternativamente di suddividere il triangolo in due parti (un triangolo isoscele e un trapezio isoscele) con un taglio parallelo alla base del triangolo, che divide l'altezza in due parti di 2 m ognuno.

Calcolare, utilizzando la similitudine tra i triangoli ABC e AEF, che EF = 3 m e quindi EK = 1,5 m.. Disporre quindi i due pezzi in modo da ricavare dal rotolo di stoffa di larghezza 2 m, come in figura e calcolare la lunghezza della striscia di stoffa da tagliare 6 + 1,5 = 7,5 m.



Possibilità 3

A partire dalla possibilità 2, suddividere il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli, come mostrato in figura, per ridurre la lunghezza della striscia da tagliare.



Concludere che la possibilità 3 è quella che consente di acquistare meno stoffa, pari ad una lunghezza di 6 m.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Occorre comprare almeno 6 m di stoffa" con le tre possibilità ben spiegate, il dettaglio dei calcoli e disegni corrispondenti

3 Risposta corretta con le tre possibilità e i disegni corrispondenti, con spiegazione e calcoli incompleti
oppure risposta ottimale scelta fra solo due possibilità, con relativi calcoli e disegni corretti

2 Risposta relativa all'individuazione di un solo caso con disegno e calcoli corretti
oppure individuazione di due casi, con errori di calcolo

1 Risposta corretta senza spiegazione
oppure inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

15. FANTASTICO 2024 (Cat. 8, 9, 10)

Rosa e Valeria, due grandi amiche, hanno 14 anni di differenza. Sono nate entrambe nel XX secolo e Rosa è la più anziana.
Rosa dice a Valeria: "Nel 2024 la mia età era uguale al numero formato dalle ultime due cifre del tuo anno di nascita" e Valeria risponde: "E' vero, ma anche la mia età era uguale al numero formato dalle ultime due cifre del tuo anno di nascita".

Quali sono gli anni di nascita di Rosa e di Valeria?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Individuare due numeri di quattro cifre, note le prime due, a partire da relazioni tra la terza e quarta cifra di entrambi i numeri dati.

Appropriazione del compito
Comprendere che entrambi i numeri di quattro cifre che indicano gli anni di nascita cominciano per 19…, in quanto sono anni del XX secolo.
Comprendere la relazione fra le età di Valeria e di Rosa, e la relazione tra gli anni di nascita di entrambe.
Capire che il numero composto dalla terza e quarta cifra dell'anno di nascita di Rosa (la più anziana), sommato all'età di Valeria dà 124, in quanto la data attuale slitta al XXI secolo e termina con 24.

Possibili strategie

Strategia n. 1
Indicando con x e y rispettivamente le età di Valeria e di Rosa si può impostare il sistema:

$$\begin{cases} 1900 + x = 2024 - y \\ y - x = 14 \end{cases}$$

la cui soluzione è la coppia ordinata (55; 69), cioè (x = 55 e y = 69)

Si conclude che Valeria è nata nel 1969 e Rosa nel 1955.

Strategia n. 2
Le due amiche hanno sicuramente più di 24 anni. Supponiamo che Valeria, che è la più giovane, abbia 25 anni quindi sarebbe nata nel 1999, Rosa avrebbe perciò 99 anni e sarebbe nata nel 1925. Ma la differenza fra le loro età non sarebbe di 14 anni, bensì di 74 anni (= 99 – 25)
Se Valeria avesse 26 anni sarebbe nata nel 1998, Rosa avrebbe 98 anni, e sarebbe nata nel 1926 ma gli anni di differenza sarebbero 72 (= 98 – 26)
Ogni volta che aggiungiamo un anno a Valeria ne togliamo uno a Rosa e la differenza fra le età diminuisce di due unità. Perciò, per arrivare ad una differenza di 14 anni occorre andare avanti ancora di (72 – 14) : 2 = 29 (anni), ed arriviamo ad un'età per Valeria di (26 + 29) anni = 55 anni. Perciò Valeria ha 55 anni ed è nata nel 1969 quindi Rosa ha 69 anni ed è nata nel 1955 e la differenza fra le due età è proprio 14 (69 - 55). È questa dunque la soluzione.

Strategia n. 3
Si procede per tentativi, ad esempio: Rosa ha 50 anni. Allora Valeria è nata nel 1950 ed ha 74 anni. Non va bene, perché Rosa è più vecchia.
Aumentiamo l'età di Rosa, ad esempio: Rosa ha 60 anni, allora Valeria è nata nel 1960 ed ha 64 anni.
Aumentiamo ancora: Rosa ha 70 anni, allora Valeria è nata nel 1970 ed ha 54 anni, ora Rosa è più vecchia, ma la differenza fra le due età è 16.
Se Rosa ha 69 anni è nata nel 1955, Valeria è nata nel 1969 ed ha 55 anni. La differenza fra le età è ora proprio di 14 anni.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Valeria è nata nel 1969 e Rosa nel 1955" con spiegazione chiara e completa della procedura seguita
3 Risposta corretta ma con spiegazione poco chiara o incompleta
2 Risposta errata a causa di un errore di calcolo ma procedura corretta
1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure approcci ad una procedura corretta senza arrivare alla soluzione
0 Incomprensione del problema

16. FESTA DI COMPLEANNO (Cat. 8, 9, 10)

Clara festeggia oggi il suo compleanno e ha invitato sette amici e sette amiche. Entrando saluta con una stretta di mano ogni invitato, poi tutti gli amici e le amiche si salutano fra loro con una stretta di mano. Alla fine, l'amico Paolo dice di aver contato più di 200 strette di mano, Luca invece dice che le strette di mano sono state poco più di cento.

Chi ha ragione?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Calcolare il numero di combinazioni semplici di 15 oggetti presi due alla volta.

Appropriazione del compito

Capire che il problema delle strette di mano può essere modellizzato in questo modo:
identificando i 15 presenti alla festa con le lettere A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, O, P, Q le strette di mano si possono rappresentare come coppie di lettere: AB rappresenta la situazione "A stringe la mano a B", AD "A stringe la mano a D" e così via.
Comprendere quindi che in questo modello, il numero delle strette di mano coincide con il numero dei possibili sottoinsiemi di 2 oggetti presi da un insieme di 15, osservando che ad esempio gli eventi AB e BA individuano lo stesso sottoinsieme {A, B} in quanto la stretta di mano tra gli amici A e B va conteggiata una sola volta.

Strategia n. 1

Partire nel conteggio dalla persona A, che avrà 14 mani da stringere.
Considerare poi la persona B: questa avrà ugualmente 14 mani da stringere. Avendo però già contato la stretta di mano tra B e A nel conteggio al passo precedente, le "nuove" strette di mano da conteggiare per B saranno 13.
Proseguire nel conteggio con la persona C, per la quale occorrerà contare 12 "nuove" strette di mano (è già stata contata la stretta di mano di C sia con A che con B ai passaggi precedenti).
Comprendere che ad ogni passo, il numero di "nuove" strette di mano diminuisce di uno e quindi proseguire in questo calcolo fino all'ultima persona, che sarà la 14esima in quanto le strette di mano della 15esima sono già tutti conteggiati ai passaggi precedenti.
Sommare i 14 numeri delle strette di mano ottenuti dal conteggio:
14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 105.

Strategia n. 2

Considerare che ogni persona stringe le mani a 14 persone (tutti tranne se stesso) e quindi sembrerebbe che le strette di mano siano 15 × 14 = 210. Rendersi conto che in questa operazione vengono conteggiate tutte le strette di mano due volte (AB e BA, AC e CA e così via), quindi dimezzare il numero ottenuto: 210 : 2 = 105.

Strategia n. 3

Riconoscere che si tratta del calcolo del numero di combinazioni semplici di classe 2 di 15 elementi e utilizzare quindi la formula: 15! : (13! x 2!) = 105.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Ha ragione Luca, perché le strette di mano sono state 105" e spiegazione chiara del ragionamento fatto per arrivare alla soluzione
3 Risposta corretta con spiegazione incompleta o non chiara
2 Risposta errata per un errore di calcolo con procedura corretta ben esplicitata
1 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure inizio di ragionamento o risposta 210 che non tiene conto delle strette di mano contate due volte
0 Incomprensione del problema

17. ALLA PLAYSTATION (II) (Cat. 9, 10)

Amedeo e Berta stanno giocando alla playstation. Nel gioco ciascuno di loro deve partire dal proprio pianeta e raggiungere quello dell'avversario utilizzando un razzo. Ogni razzo viaggia a velocità costante.
Sullo schermo c'è un cronometro che segna i minuti e i secondi di precedenti partite e che non può essere azzerato.
Amedeo e Berta iniziano il gioco cliccando nello stesso momento; perciò, i razzi partono insieme e si incrociano quando il cronometro del gioco segna 13 minuti e 0 secondi. Il razzo di Amedeo raggiunge il pianeta di Berta quando il cronometro segna 17 minuti e 0 secondi e segna 22 minuti e 0 secondi quando il razzo di Berta arriva sul pianeta di Amedeo.

Quanti minuti e quanti secondi segnava il cronometro nel momento in cui hanno cliccato per cominciare a giocare?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Saper gestire le relazioni fra distanze, tempi, velocità in una situazione di velocità costante.

Appropriazione del compito

Capire che i due razzi percorrono la stessa distanza, ciascuno con velocità diverse fra loro, ma costanti.
Capire che l'orario di arrivo dà le informazioni necessarie per sapere quando i razzi sono partiti.
Capire che occorre lavorare sui rapporti fra i tempi di percorrenza.

Possibili strategie

Strategia n. 1

Indichiamo con A il pianeta di Amedeo, con B quello di Berta, con C il punto in cui si sono incontrati.

Osservare che se si incontrano quando il cronometro segna 13 min, Amedeo ha impiegato 4 min per percorrere CB, e Berta ha impiegato 9 min per percorrere CA. Perciò:

razzo di Amedeo (da A a B)	**A**		**C**	4 min	**B**
razzo di Berta (da B a A)	**A**	9 min	**C**		**B**

Analogamente, il tempo impiegato dal razzo di Amedeo per percorrere AC è uguale a quello impiegato dal razzo di Berta per percorrere BC. Otteniamo:

razzo di Amedeo	**A**	x min	**C**	4 min	**B**	
razzo di Berta	**A**	9 min	**C**	x min	**B**	**(*)**

Dato che le velocità sono costanti, lo sarà anche il loro rapporto così come quello fra i tempi che i due amici impiegano per percorrere uguali distanze. Perciò

$\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$ da cui (scartando la soluzione negativa) $x = 6$

Quindi il cronometro alla partenza segnava 13 - 6 = 7 min.

Strategia n. 2 - fino a (*) la strategia è uguale alla precedente.

Si trova il rapporto tra le velocità costruendo l'uguaglianza tra i tempi di percorrenza dei tratti noti:

$t_A(AC) = t_B(CB)$; $\frac{s_{AC}}{v_A} = \frac{s_{CB}}{v_B}$; $\frac{v_B \cdot 9}{v_A} = \frac{v_A \cdot 4}{v_B}$ quindi $\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{9}{4}$ quindi $\frac{vA}{vB} = \frac{3}{2}$.

Considerando che il rapporto tra i tempi di percorrenza è l'inverso del rapporto tra le velocità, si deduce che Amedeo ha impiegato 6 min a percorrere il tratto AC.

Il cronometro alla partenza segnava quindi 13 - 6 = 7 min.

Strategia n. 3

$\boldsymbol{s}$ = distanza tra il pianeta di Amedeo e il pianeta di Berta
$\boldsymbol{v_A}$ = velocità del razzo di Amedeo
$\boldsymbol{v_B}$ = velocità del razzo di Berta
t_0 = tempo iniziale (ora di partenza)

Lo spazio percorso dal razzo di Amedeo da t_0 ai 13 min dovrà essere uguale a quello percorso dal razzo di Berta dai 13 min ai 22 min. Pertanto:

$$v_A\,(13 - t_0) = v_B \cdot 9$$

e lo spazio percorso dal razzo di Berta da t_0 ai 13 min dovrà essere uguale a quello percorso dal razzo di Amedeo dai 13 min ai 22 min. Pertanto:

$$v_B\,(13 - t_0) = v_A \cdot 4$$

Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo:

$$\begin{cases} v_A(13 - t_0) = v_B \cdot 9 \\ v_B(13 - t_0) = v_A \cdot 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_A(13 - t_0) = v_B \cdot 9 \\ v_B = \frac{v_A \cdot 4}{13 - t_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_A\,(13 - t_0) = \frac{v_A \cdot 4}{13 - t_0} \cdot 9 \\ v_B = \frac{v_A \cdot 4}{13 - t_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_A(13 - t_0)^2 = 36 v_A \quad \Rightarrow \quad (13 - t_0)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad t_0^2 - 26\, t_0 + 169 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0^2 - 26\, t_0 + 133 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = 13 \pm \sqrt{13^2 - 133} = 13 \pm \sqrt{36} = 13 \pm 6 = \begin{cases} t_{01} = 13 + 6 = 19 \text{ (il cronometro non può segnare 19 min)} \\ t_{02} = 13 - 6 = 7 \text{ min} \end{cases}$$

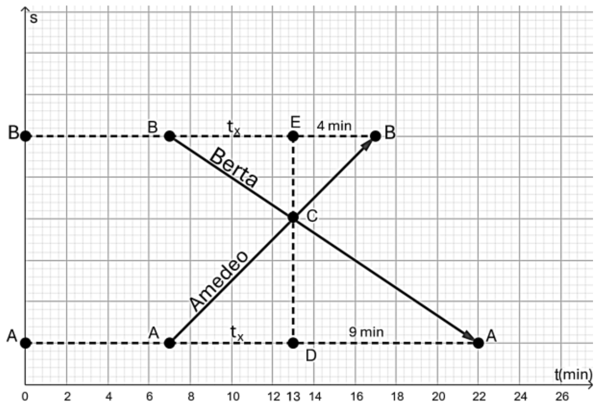
Il cronometro del gioco di Amedeo e Berta segnava 7 min quando hanno iniziato a giocare

Strategia n. 4

Si può rappresentare la situazione con un grafico spazio-tempo dove sono tracciate le due traiettorie:

- Amedeo parte dal suo pianeta (A) ed arriva su quello di Berta (B)
- Berta parte dal suo pianeta (B) ed arriva su quello di Amedeo (A)

C è il punto di incontro tra i due razzi.



I triangoli ACA e BCB sono simili:

AD = 9 min

BE = 4 min

Quindi $4 : t_x = t_x : 9$

da cui (scartando la soluzione negativa) $t_x = 6$ min.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "All'inizio del gioco il cronometro segnava 7 min" con procedimento ben argomentato e controllo delle proprietà nel confronto dei rapporti

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta

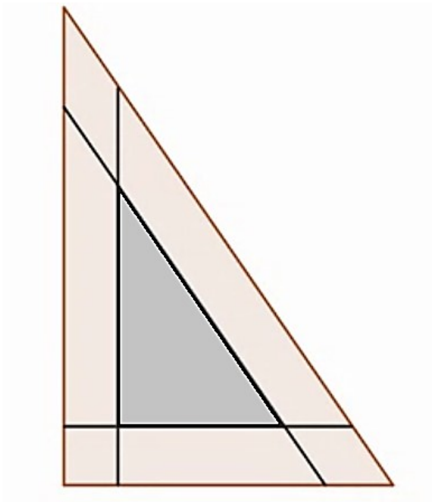
2 Risposta errata nel calcolo, ma con ragionamento corretto

1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

18. TRIANGOLO IN UN TRIANGOLO (Cat. 9, 10)

Patrizia ha un cartoncino grigio a forma di triangolo rettangolo, con i cateti che misurano 24 cm e 18 cm. Patrizia applica internamente a filo del contorno un nastro adesivo colorato largo 3 cm, come mostrato in figura:



Quanto misura il perimetro del triangolo interno?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

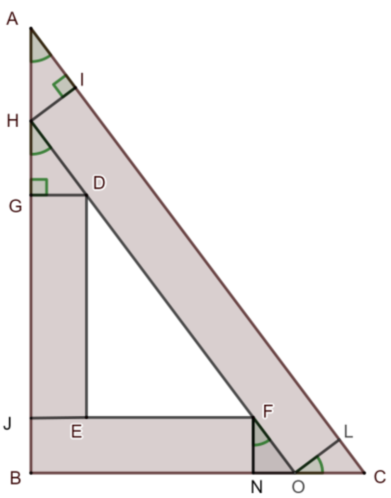
Compito matematico

Trovare il perimetro di un triangolo simile ad uno dato.

Appropriazione del compito

Capire che il triangolo interno ha i lati rispettivamente paralleli a quelli del triangolo iniziale e che quindi è simile ad esso per il primo criterio di similitudine.
Capire che ogni lato del triangolo interno è uguale alla differenza fra il lato corrispondente del triangolo esterno e la somma di due segmenti di cui occorre determinare la misura.

Possibili strategie



Strategia n. 1 - *I primi 4 punti di questa strategia servono per determinare il rapporto di similitudine che utilizzano anche le altre strategie.*

Per trovare la lunghezza di AG si possono disegnare i due triangoli rettangoli DGH e AHI, a loro volta simili al triangolo iniziale e congruenti tra loro, avendo entrambi il cateto minore di 3 cm.

Con la proporzione tra lati omologhi BC : GD = AB :GH che diventa 18 : 3 = 24 : GH si può quindi trovare GH (4 cm) e con il teorema di Pitagora o utilizzando la terna pitagorica si trova HD che è uguale ad AH (5 cm).

Trovare quindi AG = AH + HG = 9 cm e di conseguenza

ED = 24 cm - (3 cm + 9 cm) = 12 cm. .

Capire quindi che il rapporto di similitudine tra il triangolo interno e il triangolo esterno è 1:2 e che quindi il lato EF sarà la metà di BC (EF = 9 cm). Trovare DF (15 cm) con il teorema di Pitagora o utilizzando la terna pitagorica e infine calcolare il perimetro richiesto: (9 + 12 + 15) cm = 36 cm.

Strategia n. 2

Dopo aver trovato la misura di un lato del triangolo interno come sopra, si può calcolare con il teorema di Pitagora l'ipotenusa (cm 30) del triangolo esterno e trovare tutti gli altri lati con proporzioni o con il rapporto di similitudine e poi calcolo del perimetro. Oppure si calcola prima il perimetro del triangolo esterno (30 + 24 + 28 = 72) e con il rapporto di similitudine o proporzione il perimetro del triangolo interno (36).

Strategia n. 3

Si può trovare la misura di EF prolungando il lato DF fino ad incontrare il lato BC in O, con analogo procedimento, considerando i triangoli rettangoli congruenti OLC e FNO si può determinare per similitudine con il triangolo assegnato OC = 3,75 cm e NO = 2,25 cm e così EF = BC - (NO + OC + GD) =18 cm - (3,75 + 2,25 + 3) cm = 9 cm. Anche in questo caso si deduce che il rapporto di similitudine tra il triangolo interno e quello esterno è 1:2 e si procede come in una delle strategie precedenti.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "Il perimetro del triangolo interno misura 36 cm" con procedimento chiaro e completo di tutti i passaggi (dimostrazione delle similitudini, esplicitazione e giustificazione dei calcoli)

3 Risposta corretta con calcoli dettagliati, basata sulle similitudini dei triangoli, ma senza dimostrazione delle similitudini
oppure trovate le misure corrette soltanto di due lati del triangolo interno con procedimento chiaro e completo di tutti i passaggi (dimostrazione delle similitudini, esplicitazione e giustificazione dei calcoli)
oppure procedimento corretto con dimostrazione della similitudine, ma risultato sbagliato a causa di un errore di calcolo

2 Comprensione della relazione di similitudine e calcolo corretto di uno dei due cateti
oppure procedura corretta, ma risultato errato causato da due o più errori di calcolo

1 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure inizio di ragionamento corretto

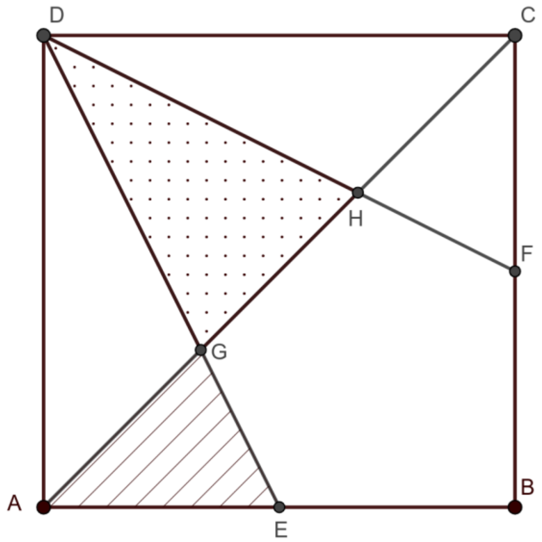
0 Incomprensione del problema

19. UNA QUESTIONE DI AREE (Cat. 10)

Un quadrato viene diviso in sei parti come mostrato in figura. I punti E ed F sono i punti medi di due lati consecutivi del quadrato. L'area della parte tratteggiata misura 24 dm^2.

Quanto misura l'area della parte punteggiata?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.



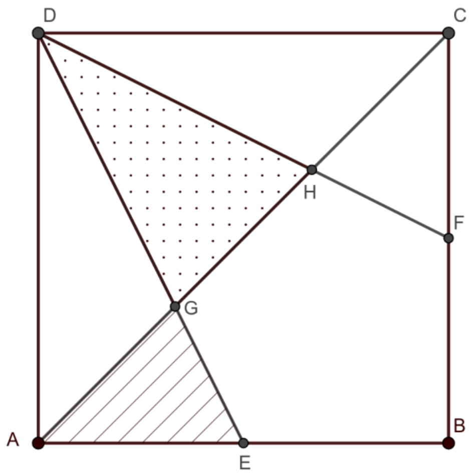
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Suddiviso un quadrato in cinque triangoli e un pentagono, determinare la misura dell'area di un triangolo conoscendo soltanto la misura dell'area di un altro triangolo.

Appropriazione del compito

Osservare che il quadrato è stato suddiviso in un pentagono e in cinque triangoli, ma che i triangoli che si possono individuare sono molti di più.
Capire che occorre trovare delle relazioni fra i lati e gli angoli dei triangoli.



Strategia n. 1

Capire che i triangoli AEG e GCD sono simili per il primo criterio (hanno una coppia di angoli opposti al vertice e una coppia di angoli uguali di 45°) e che il loro rapporto di similitudine è 1:2, essendo DC il doppio di AE. Di conseguenza GD è il doppio di EG e GC è il doppio di AG e l'area del triangolo GCD è il quadruplo dell'area del triangolo AEG cioè 96 dm^2.

La precedente considerazione deve essere utilizzata anche per le strategie successive.

Essendo DG il doppio di EG ed avendo i triangoli AGD e AEG la stessa altezza uscente da A, dedurre che l'area del triangolo AGD è il doppio dell'area del triangolo AEG quindi è 48 dm^2.

Dedurre che quindi l'area di GDC, essendo il quadruplo dell'area di AEG, è il doppio dell'area di AGD.

I due triangoli DGA e DHC sono congruenti per il secondo criterio di congruenza

(AD = DC; l'angolo DAG = DCH = 45°; ADG = CDH)

perché i triangoli AED e CDF sono congruenti per il primo criterio). Perciò anche l'area di DHC è 48 dm^2.

Per differenza anche l'area di DHG è 48 dm^2.

Strategia n. 2

Osservare che la diagonale DB è asse di simmetria per l'intera figura poiché dal fatto che è asse di simmetria del quadrato si deduce che D è simmetrico di sé stesso e il segmento EF è parallelo ad AC, poiché congiunge due punti medi dei lati del triangolo ACB, e quindi è perpendicolare a DB e dimezzato da esso essendo il triangolo EFB isoscele su EF, di conseguenza anche gli angoli EDB e BDF sono simmetrici così pure i punti G e H essendo GH perpendicolare a DB. Quini il triangolo DHC è simmetrico di AGD e perciò ad esso congruente.

Dato che GD è doppio di GE, il triangolo AGD ha area doppia rispetto ad AEG (hanno, su DE, la stessa altezza) e, per simmetria, lo stesso vale per DHC.

Perciò: Area (DGH) = Area (DGC) – Area (DHC) = 4 Area (AEG) – 2 Area (AEG) = 2 Area (AEG) = 48 dm^2.

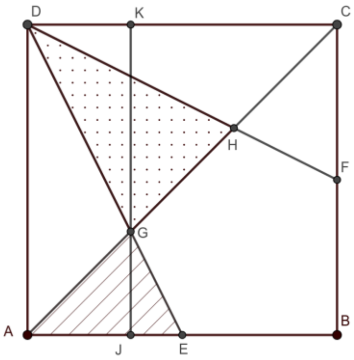
Strategia n. 3

Con la strategia 1 (oppure con la 2) si dimostra che AGD e DHC sono congruenti quindi AG=HC, perciò, CG =2 HC e quindi GH=HC=AG.

Osservare che i triangoli AEG e AGD hanno stessa altezza uscente da A e basi relative una doppia dell'altra, dunque, l'area del triangolo AGD è doppia dell'area di AEG, cioè 48 dm^2. Capire quindi che i tre triangoli AGD, GDH e HDC hanno stessa altezza uscente da D e basi relative uguali, dunque, hanno tutti la stessa area uguale a 48 dm^2; dunque, l'area del triangolo punteggiato è 48 dm^2.

Strategia n. 4

Le misure si intendono in dm per le lineari, in dm^2 per quelle di superficie.



L'area del triangolo GCD è il quadruplo dell'area del triangolo AEG, pari a 96 dm^2.

Indicati con x la misura di AE, e con y la misura di GJ, altezza di AEG relativa ad AE, possiamo dire che AB = CD = $2x$, GK = $2y$ e AD = $y + 2y = 3y$ pertanto si ha:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 24 \\ 2x = 3y \end{cases}$$

Otteniamo: $x = 6\sqrt{2}$ $y = 4\sqrt{2}$ lato del quadrato = $12\sqrt{2}$

A(ACD) = 144

A(AGD) = A(AED) – A(AEG) = $\frac{6\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2}}{2} - 24 = 48 =$ A(DHC).

Poiché i triangoli AGD e DHC sono congruenti per le motivazioni esposte in strategia 1 o in strategia 2, anche A(AGD) = A(DHC) = 48. Quindi:

A(DGH) = [A(ACD) – A(AGD)] – A(DHC) = (144 – 48) – 48 = 48 (in dm^2).

Strategia n. 5

Chiamato x la misura del lato del quadrato, si ha

A(AED) = $x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4}$

A(ADG) = $\frac{x^2}{4} - 24$

Poiché i triangoli AGD e DHC sono congruenti per le motivazioni esposte in strategia 1 o in strategia 2 si ha:

A(DGH) = A(ADC) – 2 A(ADG) = $\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - 24\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 48 = 48$ (in dm^2)

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta "L'area della parte punteggiata misura 48 dm^2" con argomentazione chiara e rigorosa e completa di tutti i passaggi

3 Risposta corretta con argomentazione chiara, ma mancante di qualche dimostrazione (ad esempio non dimostrata la similitudine fra triangoli o non giustificata la simmetria)
oppure argomentazione chiara e rigorosa completa di tutti i passaggi, ma senza risposta numerica

2 Argomentazione corretta senza arrivare alla risposta (ad esempio manca un solo passaggio alla conclusione)

1 Risposta corretta senza alcuna giustificazione
oppure inizio di ricerca corretto

0 Incomprensione del problema